De los principios a la acción

Para garantizar el éxito matemático para todos



NCTM

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS

De los principios a la acción

Para garantizar el éxito matemático para todos







1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502
(703) 620-9840; (800) 235-7566; www.nctm.org

Fourth printing September 2014

ISBN 978-0-87353-966-1

The National Council of Teachers of Mathematics is the public voice of mathematics education, supporting teachers to ensure equitable mathematics learning of the highest quality for all students through vision, leadership, professional development, and research.

Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All is an official position of the National Council of Teachers of Mathematics as approved by the NCTM Board of Directors, February 2014.

Créditos

Coordinación general de la traducción: *Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM).*

Autoría: *The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.*

Coordinación editorial: *Adriana Gasca Guzmán*

Coordinación de diseño y formación: *José Antonio Guzmán Maldonado*

Traductor: *Demetrio Garmendia Guerrero*

Edición y corrección de estilo: *Patrick (Rick) Scott*

Índice

De los principios a la acción (equipo de redacción) v

Prefacio vii

Reconocimientos ix

Avances y retos 1

Enseñanza y aprendizaje eficaces 7

Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje 13

Implementación de tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas 18

Uso y vinculación de las representaciones matemáticas 25

Favorecimiento del discurso matemático significativo 30

Planteamiento de preguntas deliberadas 37

Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual 43

Apoyo al esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas 49

Obtención y uso de la evidencia del pensamiento del estudiante 54

Elementos esenciales 59

Acceso y equidad 59

Currículo 70

Herramientas y tecnología 78

Evaluación 89

Profesionalismo 99

Puesta en acción 109

Líderes y responsables de las políticas en todos los distritos y estados o provincias 110

Directores, asesores pedagógicos, especialistas y otros líderes escolares 112

Docentes 114

Referencias 119



De los principios a la acción Equipo de redacción

Steven Leinwand — **Instituto Americano de Investigación Washington, D.C.**

Daniel J. Brahier — **Universidad Estatal de Bowling Green Bowling Green, Ohio**

DeAnn Huinker — **Universidad de Wisconsin–Milwaukee Milwaukee, Wisconsin**

Robert Q. Berry — Universidad de Virginia Charlottesville, Virginia

Frederick L. Dillon — Escuelas de la Ciudad de Strongsville (jubilado) Strongsville, Ohio

Matthew R. Larson — Escuelas Públicas de Lincoln Lincoln, Nebraska

Miriam A. Leiva — Universidad de Carolina del Norte, Charlotte, North Carolina

W. Gary Martin — Universidad de Auburn Auburn, Alabama

Margaret S. Smith — Universidad de Pittsburgh Pittsburgh, Pennsylvania

Junta de Directores del NCTM



Robert Q. Berry III	Universidad de Virginia Charlottesville, Virginia
Margaret (Peg) Cagle	Universidad de Vanderbilt Nashville, Tennessee
Dane R. Camp	‘Iolani School Honolulu, Hawaii
Mark W. Ellis	Universidad Estatal de California, Fullerton Fullerton, California
Florence Glanfield	Universidad de Alberta Edmonton, Alberta, Canadá
Karen J. Graham	Universidad de Nuevo Hampshire Durham, New Hampshire
Gladis Kersaint	Universidad de Florida del Sur Tampa, Florida
Latrenda Knighten	Escuela Primaria Polk Baton Rouge, Louisiana
Ruth Harbin Miles	Escuela Primaria de Falmouth, Mary Baldwin College Madison, Virginia
Jane Porath	Escuelas Públicas del Area de Traverse City Traverse City, Michigan
Jonathan (Jon) Wray	Escuelas Públicas del Condado de Howard Ellicott City, Maryland
Rose Mary Zbiek	La Universidad Estatal de Pennsylvania University Park, Pennsylvania

Prefacio

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (*NCTM*, por sus siglas en inglés) se enorgullece de ser la organización que inició el movimiento de estándares educativos. Desarrollados a partir de su visionaria *Agenda para la acción* de 1980*,* los *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* -redactados en 1989 por el *NCTM*- presentaron una visión completa de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas para los grados de preescolar a cuarto, así como para los grados de quinto a octavo y de noveno a decimosegundo. El documento del *NCTM* publicado en el año 2000, *Principios y estándares para la educación matemática*, amplió los estándares de 1989 y añadió los principios implícitos de las matemáticas escolares para cuatro grupos de niveles: preescolar a grado 2, grados 3 a 5, grados 6 a 8 y grados 9 a 12. En 2006 los *Puntos focales curriculares de las matemáticas para los grados de preescolar a octavo: una búsqueda de la coherencia* extendieron este trabajo al identificar las habilidades y los conceptos matemáticos más significativos de los niveles antes aludidos. En 2009 el *NCTM* abordó la educación matemática a nivel secundaria en su *Enfoque en las Matemáticas de la Educación Media Superior: Razonamiento y Construcción de Significados*.

La siguiente fase en la evolución de los estándares matemáticos fue el desarrollo de los *Estándares estatales de base común para las matemáticas*, que elaboraron conjuntamente la Asociación Nacional de Gobernadores y el Consejo de Ministros de Educación de los Estados. La divulgación de estos estándares en 2010, así como la adopción de los mismos por 45 Estados, representó una oportunidad histórica para la educación matemática en Estados Unidos.

A lo largo de estos últimos 25 años nos hemos percatado de que los estándares por sí solos —sin importar sus orígenes, su autoría o el proceso mediante los cuales se desarrollaron— no serán suficientes para alcanzar la meta de que todos los estudiantes posean altos niveles de comprensión matemática. Se necesita algo más que estándares. En vista de lo anterior, el *NCTM* desarrolló la propuesta *De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático de todos*, que es la siguiente en la lista de las publicaciones cimeras que guían la educación matemática hacia el futuro. *De los principios a la acción* describe las condiciones, las estructuras y las políticas que han de darse para que los estudiantes aprendan. Aborda los elementos esenciales de la enseñanza y el aprendizaje, del acceso y la equidad, del currículo, así como de aspectos tales como las herramientas y la tecnología, la evaluación y la profesionalización. Por último, sugiere acciones específicas que los maestros y las partes interesadas necesitan ejecutar con el objeto de culminar nuestro propósito compartido de garantizar el éxito de todos en las matemáticas.

De los principios a la acción representa un paso significativo para la articulación de una visión unificada sobre lo que se requiere a fin de desarrollar el potencial para educar a todos los estudiantes, bajo cualesquiera estándares o entornos educativos. Lo más importante, describe las acciones necesarias para asegurar que todos los educandos aprendan a convertirse en pensadores matemáticos y que estén preparados para cualquier carrera académica o trayectoria profesional que elijan. *De los principios a la acción* está orientado

a docentes, asesores pedagógicos, especialistas, directores y otros líderes escolares. Asimismo, está dirigido a los líderes y los responsables de las políticas distritales y estatales, incluyendo comisionados, superintendentes y otros funcionarios adscritos a oficinas centrales. Es más, brindará una guía a las familias respecto de lo que hay que buscar y esperar del sistema encargado de educar a sus hijos. *De los principios a la acción* explica detalladamente el papel que todos debemos desempeñar a fin de respaldar el éxito de los alumnos de hoy con el objeto de garantizar un futuro brillante para el mundo que nos rodea.

Linda M. Gojak
Presidente, 2012-2014
Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas



Reconocimientos

El equipo de redacción del documento *De los principios a la acción* recibió muchos comentarios como resultado de compartir el primer borrador con todos los miembros del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. Asimismo, el equipo acogió y tomó en cuenta comentarios de un selecto grupo de revisores invitados. Algunos de éstos leyeron y comentaron también un segundo borrador que posteriormente se sometió a análisis más minuciosos antes de preparar el manuscrito final. Entre los revisores se incluyeron matemáticos, profesores de matemáticas, desarrolladores de currículo, responsables de las políticas y docentes Otros individuos, comités o grupos -comprometidos con la tarea de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los grados de preescolar a secundaria- brindaron sus puntos de vista y comentarios de una manera menos formal. La junta de directores del *NTCM* y el equipo de redacción de este documento agradecen a todos los revisores que compartieron sus conocimientos.

Hacemos extensivo este sincero agradecimiento a las siguientes personas que en particular llevaron a cabo revisiones concienzudas o brindaron excepcionales discernimientos participando con sus puntos de vista sobre *De los principios a la acción* en sus etapas formativas. Sus razonadas contribuciones no significan un respaldo a la publicación final; más bien, enriquecieron al equipo de redacción con nuevas perspectivas, mismas que a final de cuentas propiciaron que la publicación fuese mejor.

Cal Armstrong
Don Balka
Hyman Bass
Diane Briars
George Bright
Gail Burrill
Anne Collins
Al Cuoco
David Custer
Todd Davies
Barbara Dougherty
Debbie Duvall
Mark Ellis
Francis (Skip) Fennell
Shirley Frye
Karen Fuson
Sol Garfunkel
Martin Gartzman
Patrick Hopfensberger
Andy Isaacs
Diana Kasbaum
Cathy Kelso
Henry S. Kepner, Jr.
Gladis Kersaint
Michael Lach
Glenda Lappan
Jim Lewis
Johnny Lott
Susan Jo Russell
Cathy Seeley
J. Michael Shaughnessy
Linda Sheffield
Lee V. Stiff
Marilyn Strutchens
Denisse Thompson
Uri Treisman
Zalman Usiskin
Judith Zawojewski



El *NTCM* y el equipo de redacción también desean dar las gracias al Consejo Editorial de *Mathematics Teacher* y a la *Asociación Hoosier de Formadores de Docentes de Matemáticas* por sus puntos de vista y reflexiones colectivas que ayudaron a dar forma al trabajo en ciernes y a depurar la versión final.

Por último, estamos especialmente agradecidos con los docentes y la administración de la Escuela Primaria Wheeler, de Louisville, Kentucky, cuya labor cimentó las bases para el ejemplo y el trabajo estudiantil que aparece en el análisis de la sección *Evaluación*.



Avances y retos

En 1989 el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas inició el movimiento educativo basado en estándares en Estados Unidos con la publicación del documento *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, una iniciativa sin precedentes para fomentar el mejoramiento sistémico de la educación matemática. Ahora, 25 años después, la adopción generalizada de los estándares para la educación post-secundaria y el mundo laboral —que en Estados Unidos engloban los *Estándares estatales de base común para las matemáticas* (*CCSSM*, por sus siglas en inglés)— por parte de 45 de los 50 Estados, brinda la oportunidad de redoblar esfuerzos y enfocar nuestro compromiso con el mejoramiento significativo de la educación matemática. A fin de llevar a cabo el potencial de estos nuevos estándares debemos examinar el progreso ya alcanzado, así como los retos pendientes y las acciones requeridas para garantizar en verdad el éxito matemático de todos los estudiantes.

Al reflexionar de manera retrospectiva sobre la educación matemática y los logros de los estudiantes en matemáticas, descubrimos que tenemos mucho que celebrar. Los logros de los estudiantes se ubican en máximos históricos debido en gran medida al liderazgo del *NCTM*, a la implementación gradual de un creciente material de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como a los denodados esfuerzos de casi dos millones de profesores de matemáticas en Estados Unidos, a saber:

- El porcentaje de los alumnos de cuarto grado que obtuvo o rebasó la calificación de "bueno" en la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (*NAEP*, por sus siglas en inglés) aumentó de 13% en 1990 a 42% en 2013 (*National Center for Education Statistics* [*NCES* 2013]).
- Las calificaciones promedio de los alumnos de cuarto y octavo grado en estas evaluaciones *NAEP* aumentaron 29 y 22 puntos respectivamente, entre 1990 y 2013 (*NCES* 2013).
- Entre 1990 y 2013, la calificación promedio en el SAT-Math subió de 501 a 514; asimismo, la calificación promedio en el ACT-Math mejoró de 19.9 a 20.9 (College Board 2013a; ACT 2013).
- El número de estudiantes que presentaron los exámenes para el curso avanzado de Cálculo (*Advanced Placement Calculus*) se incrementó de 77 634 en 1982 a 387 297 en 2013, de los cuales casi el 50% obtuvo una calificación de 4 o 5 (College Board 2013b).
- La cantidad de estudiantes que presentaron los exámenes para el curso avanzado de Estadística (*Advanced Placement Statistics*) aumentó de 7 667 en 1982 a 169 508 en 2013, de los cuales casi el 33% obtuvieron una calificación de 4 o 5 (College Board 2013b).

Los anteriores son logros impresionantes. Sin embargo, a la par que aplaudimos a estas altas calificaciones históricas en el *NAEP* y a los mayores logros en el SAT y el ACT —no obstante que hubo una gama significativamente más amplia y diversa de participantes en



las pruebas— otros datos recientes ponen de relieve que estamos lejos de donde requerimos ubicarnos y que todavía queda mucho por hacer, por ejemplo:

- Esencialmente las calificaciones promedio de matemáticas del *NAEP* de los adolescentes de 17 años se han estancado desde 1973 (NCES 2009).
- La diferencia en las calificaciones promedio de matemáticas en el *NAEP* entre jóvenes de 13 años blancos y negros, y entre blancos e hispanos ha disminuido un poco entre 1973 y 2012, pero sigue ubicándose entre los 17 y los 28 puntos (NCES 2013).
- En 2013 sólo alrededor de 44% de los egresados de educación media superior se consideraba que estaba preparado para estudios universitarios de matemáticas, de acuerdo con las calificaciones obtenida en el ACT y SAT (ACT 2013; College Board 2013c).
- En 2012 los canadienses adolescentes de 15 años se ubicaron en el decimotercer lugar en matemáticas entre los participantes de 34 países que presentaron la prueba PISA (*Programme for International Student Assessment*) –la cual evalúa la capacidad de los estudiantes para formular, utilizar e interpretar las matemáticas dentro de una variedad de contextos reales– con lo cual se situaron muy arriba entre los países no pertenecientes al Lejano Oriente, en tanto que los estadounidenses lograron el vigesimosexto lugar (Organización para la Cooperación Económica y el Desarrollo [*OECD*, por sus siglas en inglés] 2013a).
- Aunque la calificación promedio de muchos países en la prueba PISA aumentó de 2003 a 2012, la de Canadá y Estados Unidos disminuyó (OECD 2013a).
- Los estudiantes estadounidenses se desempeñaron relativamente bien en los reactivos PISA que sólo requerían habilidades básicas (lectura y manipulación sencilla de datos directamente de las tablas y diagramas, uso de fórmulas fáciles de manejar), pero tuvieron complicaciones con tareas que involucraban la creación, utilización e interpretación de modelos en situaciones del mundo real, así como en el empleo del razonamiento matemático (OECD 2913b).
- En las pruebas PISA sólo el 8.8% de los alumnos estadounidenses alcanzaron los dos niveles superiores en matemáticas, en tanto que el 12.6% de los estudiantes de los 34 países participantes se situó en esos niveles, incluyendo el 16.4% de los canadienses y más del 30% de los estudiantes de Hong Kong (China), Corea, Singapur y Taipei (OCDE 2013a).
- Sólo 16% de los alumnos estadounidenses de los últimos años de educación media superior alcanzan el grado de "bueno" en matemáticas y se muestran interesados en cursar una carrera de las áreas de ciencias, tecnología, ingeniería o matemáticas (*STEM*, por sus siglas en inglés) (U.S. Department of Education 2014).

Estos datos más alarmantes señalan los retos que aún subsisten y la labor que todavía se necesita llevar a cabo con el objeto de hacer del éxito matemático una realidad para todos los estudiantes, verbigracia:



- Eliminar las persistentes brechas en los logros por causa de la raza, la etnia o el ingreso económico, a fin de que todos los estudiantes tengan oportunidades y apoyos para alcanzar altos niveles de aprendizaje matemático.

- Aumentar el nivel del aprendizaje matemático de cada estudiante, de manera que esté preparado para la educación post-secundaria y el mundo laboral cuando egrese de la educación media superior.

- Incrementar el número de egresados de la educación media superior —sobre todo de los grupos tradicionalmente subrepresentados— que estén preparados y que se interesen en cursar carreras en las áreas de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas.

En resumen, debemos pasar de los "grupos aislados de excelencia" a la "excelencia sistémica" ofreciendo educación matemática que fomente el aprendizaje de todos los estudiantes al máximo nivel posible.

Con el objeto de alcanzar esa meta, debemos transformar una variedad de realidades improductivas y preocupantes presentes en muchos salones de clase, escuelas y distritos. *De los principios a la acción* analiza y documenta tales realidades:

- Excesiva preocupación por procedimientos de aprendizaje que no tienen vínculo alguno con el significado, la comprensión o las aplicaciones que requieren tales procedimientos.

- Las inferiores expectativas y los currículos más reducidos de los cursos remediales limitan a muchos estudiantes.

- Una gran cantidad de docentes tiene acceso limitado a los materiales educativos, las herramientas y la tecnología que necesitan.

- Se da una importancia excesiva a los resultados de las evaluaciones –en particular a las de gran escala y de alto impacto– que hacen énfasis en las habilidades y en la memorización de hechos, pero no prestan suficiente atención a la resolución de problemas y al razonamiento.

- Muchos docentes de matemáticas permanecen profesionalmente aislados, sin gozar de los beneficios de las estructuras y el asesoramiento colaborativos, además de que carecen de oportunidades adecuadas para su desarrollo profesional concerniente con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Se tiene como resultado que pocos estudiantes —sobre todo los pertenecientes a los grupos tradicionalmente subrepresentados— estén alcanzando altos niveles de aprendizaje matemático.

Por lo tanto, no es tiempo de dormirnos en nuestros laureles. Incluso una revisión superficial de las expectativas básicas de trabajo y de las responsabilidades cotidianas subyacentes en la gestión doméstica y en las responsabilidades ciudadanas sugieren que ideas matemáticas esenciales como proporción, tasa de cambio, igualdad, dimensión, muestra aleatoria y correlación, debiera comprenderlas casi cualquier adulto, lo cual es una meta que está muy lejos de la realidad actual.



No obstante, hoy en día lo que resulta diferente y promisorio es la esperanza de que se implementen los *CCSSM* y que la nueva generación de evaluaciones rigurosas y apegadas a dichos estándares ayuden a afrontar los retos continuos y a extender el progreso ya logrado. Todos los estados y provincias ya han hecho suya la necesidad de contar con estándares coherentes que fomenten la preparación para la educación post-secundaria y el mercado laboral, sin importar que hayan o no hayan adoptado los *CCSSM*. El Consejo declaró públicamente en 2013 que:

> *La adopción generalizada de los Estándares estatales de base común para las matemáticas ofrece una oportunidad sin precedentes para el mejoramiento sistémico de la educación matemática en los Estados Unidos. Los Estándares estatales de base común para las matemáticas colocan el cimiento para el desarrollo de currículos, enseñanza y evaluaciones matemáticos coherentes, enfocados y más vigorosos que fomenten el entendimiento conceptual y el razonamiento, así como el dominio de las habilidades. Tal cimiento ayudará a garantizar que todos los estudiantes estén preparados para la educación post-secundaria y el mundo laboral cuando egresen de la educación media superior y que estén capacitados para tomar su lugar como participantes cabales y productivos dentro de la sociedad.*

Los *CCSSM* brindan una guía y dirección; asimismo, ayudan a enfocar y clarificar los resultados comunes. Fomentan el desarrollo de nuevos recursos y evaluaciones de enseñanza. Sin embargo, los *CCSSM* no les dice a los docentes, asesores pedagógicos, personal administrativo, padres o responsables de las políticas lo que deben hacer en el salón de clases o a nivel distrital, ni la forma de empezar a hacer cambios esenciales para implementar dichos estándares. Es más, no describen ni prescriben las condiciones esenciales necesarias para garantizar el éxito matemático de todos los estudiantes. Por consiguiente, el propósito principal del documento *De los principios a la acción* consiste en zanjar la brecha habida entre el desarrollo y la adopción de los *CCSSM*, así como de otros estándares, y la promulgación de prácticas, políticas, programas y acciones que se requieren para su implementación generalizada y exitosa. Su mensaje global es que la enseñanza eficaz constituye la esencia no negociable que garantiza que cada estudiante aprenda matemáticas a niveles altos y que dicha enseñanza necesita una gama de acciones estatales o provinciales, distritales escolares y del salón de clases.

El *NCTM* propone en *De los principios a la acción* un conjunto de acciones muy recomendables, basadas en investigaciones, para todos los docentes, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes educativos y responsables de políticas. Estas recomendaciones se basan en los principios fundamentales del Consejo. En el documento *Principios y estándares para la educación matemática*, en 2000 el *NCTM* definió primero un conjunto de principios que “describen las características de la educación matemática de alta calidad” (p. 11). La lista de la página siguiente presenta la actualización de los principios que constituyen la base del documento *De los principios a la acción*.

Las revisiones hechas a este conjunto actualizado de principios hablan de más de una década de experiencia y de nuevas evidencias de investigación sobre excelentes programas de matemáticas, así como también revelan obstáculos significativos y creencias improductivas que continúan comprometiendo el progreso. En las secciones siguientes se definen estos seis principios, se escrutan las creencias productivas e improductivas, los principios



se vinculan con prácticas eficaces y se ilustran con ejemplos. La sección final propone acciones específicas para prácticas productivas y políticas que resultan esenciales en la implementación generalizada de los programas de matemáticas para los grados de preescolar a educación media superior, mismos que tienen el potencial de asegurar finalmente el éxito matemático para todos los estudiantes.

Principios rectores para la educación matemática
Enseñanza y aprendizaje. Un programa de matemáticas de excelencia necesita una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática.
Acceso y equidad. Un programa de matemáticas de excelencia requiere que todos los estudiantes tengan acceso a un currículo de matemáticas de alta calidad, a técnicas de enseñanza y aprendizaje eficaces, que les brinde altas expectativas y que les proporcione el apoyo y los recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje.
Currículo. Un programa de matemáticas de excelencia incluye un currículo que amplíe unas matemáticas significativas y unos desarrollos de aprendizaje coherentes, así como también que acreciente las conexiones entre las áreas de estudio matemático y los vínculos entre las matemáticas y el mundo real.
Herramientas y tecnología. Un programa de matemáticas de excelencia integra la utilización de la tecnología y las herramientas matemáticas como un recurso esencial con el objeto de auxiliar a los estudiantes a aprender, darle sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y a comunicar su pensamiento matemático.
Evaluación. Un programa de matemáticas de excelencia garantiza que la evaluación sea una parte integral de la enseñanza, ofrece evidencias del dominio del contenido matemático importante y de las prácticas matemáticas relevantes, incluye una variedad de estrategias y de fuentes documentales y moldea la retroalimentación a los estudiantes, las decisiones de enseñanza y el mejoramiento del programa.
Profesionalismo. En un programa de matemáticas de excelencia los docentes y sus colegas se hacen responsables del éxito matemático de cada estudiante así como de su avance profesional, personal y colectivo, hacia la enseñanza y el aprendizaje eficaces de las matemáticas.



Enseñanza y aprendizaje eficaces

Un programa de matemáticas de excelencia necesita una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática.

La enseñanza de las matemáticas es compleja. Exige que los docentes posean tanto un entendimiento profundo del conocimiento matemático que esperan enseñar (Ball, Thames y Phelps 2008) como una visión clara de la forma en que se desarrolla y progresa el aprendizaje matemático del estudiante a lo largo de los grados escolares (Daro, Mosher y Corcoran 2011; Sztajan et al. 2012). También demanda que los docentes sean expertos en la enseñanza de manera que sean eficaces en el desarrollo del aprendizaje matemático de todos los estudiantes. Esta sección presenta, describe e ilustra un conjunto de ocho prácticas de enseñanza basadas en investigaciones, las cuales refuerzan el aprendizaje matemático de cada estudiante. Sin embargo, antes de abordar tales prácticas de enseñanza, debemos tener claridad respecto del aprendizaje matemático que tal enseñanza debe inspirar y desarrollar, así como de la inextricable conexión entre la enseñanza y el aprendizaje.

Se ha determinado que el aprendizaje de las matemáticas incluya el desarrollo de cinco aspectos interrelacionados, que en conjunto conforman la destreza matemática (National Research Council 2001):

1. Comprensión de conceptos
2. Destreza en los procedimientos
3. Capacidad estratégica
4. Razonamiento adaptativo
5. Disposición productiva

La comprensión de conceptos (es decir, el entendimiento y la vinculación de conceptos, operaciones y relaciones) establece el fundamento y resulta necesaria para desarrollar la destreza en los procedimientos (a saber, la utilización significativa y flexible de procedimientos para resolver problemas).

La capacidad estratégica (es decir, la habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos) y el razonamiento adaptativo (*id est*, la capacidad para pensar lógicamente y para justificar el propio razonamiento) refleja la necesidad de que los estudiantes desarrollen formas matemáticas de pensamiento, como la base para resolver problemas matemáticos que pudiesen afrontar en la vida real, así como en las matemáticas y en otras disciplinas. Estas formas de pensamiento se describen de distintas maneras como "procesos" (en los *Estándares de procesos* del *NCTM* [2000]), "hábitos de razonamiento" (*NCTM* 2009) o "prácticas matemáticas" (Centro para las óptimas prácticas de la Asociación Nacional de Gobernadores y Consejo de Ministros de Educación de los Estados [*NGA*

Center y *CCSSO* 2010]). En el presente documento, y en concordancia con los *Estándares estatales de base común para las matemáticas* (*CCSSM*), nos referiremos a ellas como "prácticas matemáticas", mismas que representan lo que los estudiantes llevan a cabo conforme aprenden matemáticas (véase la fig. 1).

1. Darle sentido a los problemas y perseverar en su resolución.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los otros.
4. Hacer modelos con matemáticas.
5. Utilizar estratégicamente las herramientas adecuadas.
6. Cuidar la precisión.
7. Buscar y utilizar estructuras.
8. Buscar y expresar regularidades en el razonamiento iterativo.

Fig. 1. Estándares para la práctica matemática (*NGO Center* y *CCSS0* 2010, pp. 6-8).

La quinta área mencionada antes (disposición productiva) es "la tendencia a encontrar sentido en las matemáticas, a percibirlas como útiles y valiosas, a creer que el esfuerzo continuo para aprender matemáticas es redituable y a concebirse uno mismo como aprendiz y productor de matemáticas" (National Research Council 2001, p. 131). Los estudiantes necesitan reconocer el valor que posee estudiar matemáticas y estar convencidos de que son capaces de aprender matemáticas a través de la determinación y el esfuerzo (Schunk y Richardson 2011). A corto plazo, esta convicción incrementa la motivación y voluntad del estudiante por perseverar en la resolución de problemas desafiantes, y a largo plazo para continuar sus estudios de matemáticas. El interés y la curiosidad despertados mediante el estudio de las matemáticas pueden incitar perennes actitudes positivas hacia la asignatura.

El aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante "depende fundamentalmente de lo que acontece dentro del salón de clases, en función de cómo interactúan los docentes y los educandos con el currículo" (Ball y Forzani 2011, p. 17). Ball y otros investigadores (por ejemplo, Ball *et al*. 2009; Grossman, Hammerness y McDonald 2009; Lampert 2010; McDonald, Kazemi y Kavanagh 2013) argumentan que la profesión de docente necesita identificar y trabajar simultáneamente en la implantación de un conjunto común de prácticas de alto impacto que subyacen en la enseñanza eficaz. Por "prácticas de alto impacto" se entiende aquellas "prácticas que están en el corazón del trabajo de enseñanza y que es más probable que afecten al aprendizaje del estudiante" (Ball y Forzani 2010, p. 45).

Aunque la enseñanza eficaz de las matemáticas pueda tener similitudes con la enseñanza productiva de otras disciplinas (Duit y Treagust 2003; Hlas y Hlas 2012), cada asignatura necesita centrar su atención en aquellas prácticas de enseñanza que resulten más eficaces para el apoyo del aprendizaje específico de esa disciplina por parte del estudiante



(Hill *et al*. 2008; Hill, Rowan y Ball 2005). La investigación surgida tanto de la ciencia cognitiva (Mayer 2002; Brandsford, Brown y Cocking 2000; National Research Council 2012a) como de la educación matemática (Donovan y Bransford 2005; Lester 2007) apoyan la caracterización del aprendizaje de las matemáticas como un proceso activo en el que cada estudiante construye su propio conocimiento matemático a partir de experiencias personales, aunado con una retroalimentación por parte de sus compañeros y de los docentes, así como de otros adultos y de ellos mismos. Esta investigación identificó varios principios de aprendizaje que proporcionan las bases para la enseñanza eficaz de las matemáticas. En particular, los educandos deben tener experiencias que les permitan:

- Comprometerse con tareas desafiantes que impliquen construir sentidos significativos y que apoyen el aprendizaje significativo.
- Vincular el nuevo aprendizaje con el conocimiento previo y con el razonamiento informal así como contrarrestar conceptos erróneos y preconcebidos durante el proceso.
- Adquirir conocimientos conceptuales y procedimentales, de manera que puedan organizar en forma significativa su conocimiento, adquirir nuevo conocimiento y transferir y aplicar el conocimiento a nuevas situaciones;
- Construir socialmente el conocimiento a través del discurso, la actividad y la interacción relacionadas con problemas significativos;
- Recibir una retroalimentación descriptiva y oportuna, de manera que ésta pueda reflejar y revisar su trabajo, razonamiento y comprensión, y además…
- Desarrollar una conciencia metacognitiva de sí mismos como educandos, pensadores y solucionadores de problemas, y aprender a supervisar su aprendizaje y desempeño.

Prácticas de enseñanza de las matemáticas

Ocho prácticas de enseñanza de las matemáticas proporcionan un marco teórico para fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este marco de enseñanza y aprendizaje, basado en investigaciones, refleja los principios de aprendizaje citados antes, así como otro tipo de conocimiento de la enseñanza matemática que se ha acumulado a lo largo de las dos últimas décadas. La lista de la siguiente página identifica estas ocho prácticas de enseñanza de las matemáticas, mismas que representan un conjunto esencial de prácticas de alto impacto y de habilidades esenciales de enseñanza que se requieren para desarrollar un profundo aprendizaje de las matemáticas.

Obstáculos

Las creencias de la cultura dominante concernientes a la enseñanza y el aprendizaje continúan siendo un obstáculo para la sólida implementación en el salón de clases de la enseñanza y el aprendizaje eficaces de las matemáticas (Handal 2003; Philipp 2007). Muchos padres y docentes creen que a los estudiantes debería enseñárseles como a ellos les enseñaron, mediante la memorización de hechos, fórmulas y procedimientos para luego practicar

habilidades una y otra vez (verbigracia: Sam y Ernest 2000). Esta concepción eterniza el paradigma de la lección tradicional —consistente en las actividades de repaso, demostración y práctica— que todavía impregna a muchos salones de clase (Banilower *et al*. 2006; Weiss y Pasley 2004).

Prácticas de enseñanza de las matemáticas
Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje. Una enseñanza eficaz de las matemáticas establece metas matemáticas claras concernientes con las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo, las inserta dentro de los desarrollos de aprendizaje y las utiliza como guía para las decisiones de enseñanza.
Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas. La enseñanza eficaz de las matemáticas involucra a los estudiantes en tareas de resolución y análisis, las cuales promueven el razonamiento matemático y la resolución de problemas, además de que permiten que haya múltiples maneras de abordar los problemas y existan estrategias de resolución variadas.
Uso y vinculación de las representaciones matemáticas. Una enseñanza eficaz de las matemáticas obliga a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas para profundizar el entendimiento de conceptos y procedimientos matemáticos, así como para concebir a ambos como herramientas para la resolución de problemas.
Favorecimiento del discurso matemático significativo. Una enseñanza eficaz de las matemáticas promueve el diálogo entre los estudiantes a fin de que puedan construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas, a través del análisis y la comparación de sus enfoques y argumentos.
Planteamiento de preguntas deliberadas. Una enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza preguntas deliberadas para evaluar y mejorar el razonamiento del estudiante y para que le dé sentido a ideas y relaciones matemáticas importantes.
Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual. Una enseñanza eficaz de las matemáticas logra la fluidez en los procedimientos matemáticos basándose en la comprensión conceptual, de manera que los estudiantes, con el tiempo, se vuelvan hábiles en el empleo flexible de procedimientos, a medida que resuelven problemas contextuales y matemáticos.
Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una enseñanza eficaz de las matemáticas brinda consistentemente a los estudiantes, de manera individual y colectiva, las oportunidades y los apoyos necesarios para que se involucren en esfuerzos productivos a medida que aborden ideas y relaciones matemáticas.
Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes. Una enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoye y extienda el aprendizaje.



Tanto los docentes como los padres no suelen estar convencidos de que al desviarse de las creencias y las prácticas establecidas se obtenga como resultado un aprendizaje más eficaz del alumno (Barkatsas y Malone 2005; Wilken 2008).

Creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas	
Creencias improductivas	***Creencias productivas***
El aprendizaje de las matemáticas debe limitarse a practicar procedimientos y memorizar combinaciones básicas de números.	El aprendizaje de las matemáticas ha de enfocarse en desarrollar la comprensión de conceptos y de procedimientos mediante la resolución de problemas, el razonamiento y el discurso.
Los estudiantes sólo necesitan aprender y usar los mismos algoritmos de cálculo numérico estándar y los mismos métodos prescritos para resolver problemas algebraicos.	Cada estudiante debe contar con un abanico de estrategias y enfoques de los cuales pueda echar mano al resolver problemas, el cual incluya pero no se limite a métodos generales, algoritmos estándar y procedimientos.
Los estudiantes pueden aprender a aplicar las matemáticas sólo después de que hayan dominado las habilidades básicas.	Los estudiantes pueden aprender matemáticas mediante la exploración y la resolución de problemas matemáticos y contextuales.
El papel del docente consiste en decir a los estudiantes exactamente las definiciones, fórmulas y reglas que deben saber, así como mostrar la forma de utilizar dicha información para resolver problemas matemáticos.	El papel del docente es involucrar a los estudiantes en tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas, así como facilitar un diálogo que los impulse hacia una comprensión compartida de las matemáticas.
El papel de los estudiantes consiste en memorizar la información que se presenta y luego emplearla para resolver problemas rutinarios en forma de tarea, pruebas cortas y exámenes.	El papel del estudiante es estar involucrado activamente a fin de dar sentido a las tareas matemáticas utilizando diversas estrategias y representaciones, justificando sus soluciones, haciendo conexiones con el conocimiento previo o con contextos y experiencias familiares, además de tener en cuenta el razonamiento de los otros.
Un docente eficaz allana las matemáticas a sus alumnos guiándolos paso a paso a través de la resolución de problemas, con el objeto de asegurar que no se frustren o confundan.	Un docente eficaz proporciona a sus estudiantes retos que sean apropiados, los anima a tener perseverancia en la resolución de problemas y apoya el esfuerzo productivo al enseñar matemáticas.

En total contraposición a esta postura, existe la creencia de que las lecciones de matemáticas deben centrarse en involucrar a los estudiantes en el análisis y la resolución de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas (*NCTM* 2009; National Research Council 2012a). Los docentes que defienden esta creencia planifican sus cursos para impulsar la interacción y el diálogo del estudiante, con el propósito de ayudarlos a darles sentido a los conceptos y procedimientos matemáticos. Sin embargo, la falta de acuerdo respecto de lo que constituye la enseñanza eficaz de las matemáticas no permite a las escuelas y a los sistemas escolares el establecimiento de unas expectativas coherentes respecto de una enseñanza de las matemáticas que sea productiva y de alta calidad (Ball y Forzani 2011).

Las creencias de los docentes ejercen una influencia en las decisiones que toman concernientes con la forma en la que enseñan matemáticas, tal y como se indica en la columna derecha de la tabla anterior. Las creencias de los estudiantes influyen en su percepción de lo que significa aprender matemáticas y en su disposición mostrada para la asignatura. Tal y como la tabla resume, el impacto de esas creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas puede ser productivo o improductivo. Resulta importante hacer notar que tales creencias no deben concebirse como buenas o malas. Más bien, deben considerarse como improductivas cuando obstruyen la implementación de una práctica educativa eficaz o limita a los estudiantes el acceso a importantes contenidos y prácticas matemáticas.

Superación de los obstáculos

La enseñanza de las matemáticas requiere una pericia especializada y un conocimiento profesional que incluya no sólo el saber matemático sino también conocer las formas de hacerlo útil para la labor de enseñanza (Ball y Forzani 2010; Ball, Thames y Phelps 2008). La enseñanza de las matemáticas exige un entendimiento específico y una comprensión profunda de la materia, de manera que los docentes puedan llevar a cabo su trabajo con destreza en las clases de matemáticas. Una parte de la labor de la enseñanza de las matemáticas incluye encontrar un ejemplo o una tarea para aclarar una cuestión matemática específica, así como vincular las representaciones matemáticas con las ideas subyacentes y con otras representaciones, además de evaluar el razonamiento matemático y las explicaciones de los estudiantes. Este trabajo también exige que los docentes sean capaces de desplegar los temas matemáticos que conocen a la perfección y que los vuelvan a examinar a través de la mirada de los educandos, así como ser capaces de trabajar en el salón de clases de manera simultánea con muchos alumnos, cada uno de los cuales tiene antecedentes, intereses y necesidades de aprendizaje únicos.

El siguiente análisis y ejemplos de las ocho prácticas de enseñanza de las matemáticas apoyan la incorporación de las creencias productivas, identificadas antes, al trabajo profesional cotidiano de los eficaces docentes de matemáticas. Este marco teórico brinda a los docentes que están dentro de las escuelas y a lo largo de los distritos una óptica común, con el objeto de que se encaminen en forma colectiva hacia una práctica mejorada de enseñanza y para apoyarse entre ellos a fin de convertirse en expertos en la enseñanza de maneras que garanticen a todos los alumnos un aprendizaje exitoso de las matemáticas.



Establecimiento de las metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje

Una enseñanza eficaz de las matemáticas establece metas matemáticas claras concernientes con las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo, las inserta dentro de los desarrollos de aprendizaje y las utiliza como guía para las decisiones de enseñanza.

La enseñanza eficaz de las matemáticas comienza con una comprensión compartida entre los maestros sobre las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo y la manera en que éstas se despliegan a lo largo de desarrollos de aprendizaje. Tal comprensión compartida incluye la clarificación de metas matemáticas más amplias, mismas que guían la planificación basada en unidad por unidad, así como las metas matemáticas más específicas que orientan las decisiones educativas, basadas en lección por lección. El establecimiento de metas claras no sólo guía las decisiones de los docentes durante una lección, sino también centra la atención de los estudiantes en el seguimiento de su propio progreso hacia los resultados de aprendizaje propuestos.

Análisis

Las metas matemáticas señalan lo que los estudiantes de matemáticas deben aprender y comprender, como resultado de la enseñanza (Wiliam 2001). De hecho, "formular conjuntos de metas de aprendizaje claras y explícitas prepara el terreno para todo lo demás" (Hiebert *et al*. 2007, p. 57). Las metas deben describir aquellos conceptos, ideas o métodos matemáticos que los educandos comprenderán de una forma más profunda como producto de la enseñanza, así como también identificarán las prácticas matemáticas que habrán de aprender a utilizar con mayor dominio. Los docentes necesitan dejar en claro la manera en que las metas de aprendizaje se relacionan y se van construyendo para lograr estándares más rigurosos, como los *Estándares estatales de base común para matemáticas*. No obstante, las metas que guían la enseñanza, no deben ser sólo una reiteración de un enunciado estándar o de varios, sino más bien deben estar vinculadas de manera más específica con el currículo actual del salón de clase y con las necesidades de aprendizaje del estudiante, al referirse por ejemplo a representaciones visuales particulares o a métodos y conceptos matemáticos que los educandos habrán de comprender como resultado de la enseñanza.

Las metas de aprendizaje insertadas en los desarrollos de aprendizaje matemático (Daro, Mosher y Corcoran 2011) y vinculadas con las "grandes ideas" de las matemáticas (Charles 2005) proporcionan un sustento más firme para las decisiones de enseñanza de los docentes. Los desarrollos de aprendizaje, o trayectorias, describen la forma en que los estudiantes efectúan transiciones desde su conocimiento previo hacia conocimientos más complejos. Los desarrollos también identifican conocimientos intermedios y vinculan la investigación concerniente con el aprendizaje del alumno con la enseñanza (Clemens y Sarama 2004; Sztajn *et al*. 2012). Tanto docentes como educandos requieren ser capaces de responder a preguntas cruciales:

- ¿Qué matemáticas se están aprendiendo?
- ¿Por qué esto es importante?
- ¿Cómo se relaciona con lo que ya se ha aprendido?
- ¿Hacia dónde se dirigen estas ideas matemáticas?

Ubicar metas de aprendizaje dentro del panorama de las matemáticas brinda oportunidades de construir conexiones en forma explícita, de manera que los estudiantes se percaten cómo se construyen y se relacionan entre sí las ideas y asimismo lleguen a percibir las matemáticas como una disciplina coherente y vinculada (Fosnot y Jacob 2010; Ma 2010).

Para los estudiantes el propósito matemático de una lección no debe constituir un misterio. Las clases en donde estén al tanto de las expectativas de aprendizaje referentes al desempeño de su labor logran niveles más altos que aquellas en las que tales expectativas son difusas (Haystead y Marzano 2009; Hattie 2009). Si bien no se necesitan anunciar las metas diarias, sí resulta importante que los estudiantes comprendan el propósito matemático de una lección y la forma en que las actividades contribuyen y apoyan su aprendizaje matemático. Las metas o las preguntas básicas motivan el aprendizaje cuando los educandos perciben las metas como desafiantes pero alcanzables (Marzano 2003; McTighe y Wiggins 2013). Los docentes pueden exponer versiones más cercanas a los estudiantes de las metas matemáticas durante la clase si esto resulta apropiado, de manera que éstos se percaten del valor de su trabajo y comprendan el propósito del mismo (Black y Wiliam 1998a; Marzano 2009). Cuando los profesores hacen referencia a las metas durante el aprendizaje, los alumnos se enfocan mejor y son más capaces de llevar a cabo la autoevaluación y dar seguimiento a su propio aprendizaje (Clarke, Timperley y Hattie 2004; Zimmerman 2001).

Una nítida comprensión de las matemáticas moldea las decisiones que los maestros toman, conforme planifican las lecciones de matemáticas, hacen ajustes durante la enseñanza y reflejan el avance que los estudiantes están teniendo hacia las metas, después de la enseñanza. En particular, al establecer metas específicas y al considerar cómo éstas se conectan con el más amplio panorama de las matemáticas, los docentes están mejor preparados para utilizar las metas en la toma de decisiones durante la enseñanza (Hiebert *et al.* 2007). Lo anterior implica facilitar un discurso significativo, asegurar conexiones entre las ideas matemáticas, apoyar a los estudiantes conforme se esfuerzan y determinar lo que se considere como evidencia de su aprendizaje (Seidle, Rimmele y Prenzel 2005). La práctica de establecer metas claras que indiquen las matemáticas que están aprendiendo los alumnos proporciona el punto inicial y el fundamento de una enseñanza eficaz y deliberada.

Ejemplo

El establecimiento de metas diáfanas comienza por aclarar y comprender las expectativas matemáticas respecto del aprendizaje del estudiante. La figura 2 presenta un fragmento de una sesión en la que dos profesores, el profesor Fernández y la profesora Muñoz, junto con su asesor pedagógico, trabajaron en una sesión de planificación colaborativa con el objeto de analizar y aclarar las metas de aprendizaje matemáticas para sus alumnos de segundo grado. Obsérvese cómo los docentes comienzan describiendo lo que los estudiantes harán en la lección, en vez de decir lo que éstos estarán aprendiendo. Desde luego, los maestros necesitan



Dos grupos de segundo año están en estos momentos tratando de entender y resolver problemas de adición y sustracción situados dentro de un contexto real. La siguiente conversación se desarrolla durante una sesión de planificación entre los dos profesores y su asesor pedagógico de matemáticas. Los docentes seleccionaron tres problemas para dar sentido a la sustracción y para que funjan como el punto central en una de las lecciones.

- María quiere comprar el libro siguiente de su serie favorita cuando se publique el próximo mes. Hasta el momento ha ahorrado $15. El libro costará $22. ¿Cuánto dinero necesita ahorrar para que pueda adquirir el libro? (Tipo de problema: sumara/resultado desconocido).
- Jorge y su papá se están encargando de inflar los globos para la fiesta. La bolsa contiene 36. Después de inflar muchos globos, el papá de Jorge se dio cuenta de que todavía quedaban 9 en la bolsa. ¿Cuántos globos habían inflado? (Tipo de problema: restar de/resultado desconocido)
- Luisa y Natalia se están preparando para participar en un maratón. Esta semana Luisa corrió 43 kilómetros y Natalia 27. ¿Cuántos kilómetros corrió más Luisa que Natalia? (Tipo de problema: comparar/diferencia desconocida).

Profra. Muñoz: Creo que debemos hacer que los estudiantes trabajen en pequeños grupos para que resuelvan los problemas.

Prof. Pérez: Estoy de acuerdo, pero también podrían leer por turnos los problemas y luego que cada uno haga diagramas o utilice cubos para resolverlos y más adelante podrían comparar sus respuestas.

Asesor: Está bien. Eso es lo que quieren que hagan los estudiantes. Ahora hablemos más sobre lo que ustedes quieren que aprendan como resultado de esta lección.

Profra. Muñoz: Queremos que entiendan mejor estos diversos tipos de problemas enunciados con palabras y que puedan resolverlos.

Asesor: Está bien. Hagamos una lista de algunos de los indicadores que pudieran demostrar que los entienden.

Prof. Pérez: Podrían usar cubos o hacer diagramas para mostrar lo que está pasando en el problema, explicar lo que hicieron y por qué lo hicieron y ser capaces de dar la respuesta correcta.

Profra. Muñoz: También quiero que escriban una ecuación que sea el modelo de cada situación. Algunas de éstas pudieran ser: $15 + \square = 22$, $36 = \square + 9$, o $36 - \square = 9$ y $43 - 27 = \square$ o $43 = 27 + \square$

Prof. Pérez:	Así, si nos da tiempo en esta clase, o quizá al siguiente día, quisiéramos que nuestros alumnos compararan los diferentes problemas y ecuaciones y puedan explicar cómo se relacionan con la adición y sustracción, aun cuando los contextos parezcan muy distintos.
Asesor:	¿Pueden explicar un poco más por qué eligieron estos tres problemas para esta lección?
Prof. Pérez:	Cada problema planteado con palabras se ubica en una situación distinta que da significado a la sustracción. En un problema se trata de un sumando desconocido, otro es sobre la sustracción como resta y el otro se refiere a calcular la diferencia cuando se comparan dos cantidades.
Profra. Muñoz:	Esperamos que los alumnos mejoren en su razonamiento respecto de las relaciones entre las cantidades de cada contexto y la manera en que esto se vincula con la adición y la sustracción. Además, es necesario que sean capaces de trabajar con estos tipos de problemas más difíciles y no sólo con los problemas sencillos de restar (es decir, restar de/resultado desconocido)
Asesor	Permítanme ver si puedo resumirles esto. Sus metas de aprendizaje para estas lecciones son que los estudiantes representen y resuelvan problemas planteados con palabras usando diagramas u objetos y ecuaciones, que comparen cómo las situaciones de los problemas son similares y distintas, y que expliquen la forma en que la estructura subyacente de cada problema se relaciona con la adición y sustracción.
Profra. Muñoz:	Sí, y yo quiero oír que en sus explicaciones digan lo que significa cada número en el problema, ya que en esta lección conocen la cantidad total y una de las partes o sumandos, y también necesitan calcular el otro sumando desconocido.

Nota: la clasificación de los tipos de problemas se basa en el Glosario de los *CCSSM*, tabla 1 (*NGA* Center y *CCSSO* 2010, p. 88).

Fig. 2. Sesión de planeación colaborativa enfocada en aclarar las metas matemáticas de una lección sobre problemas contextualizados de sustracción.

estar al tanto de la logística de la lección, pero también deben poner la atención suficiente para establecer una comprensión detallada de las metas de aprendizaje matemático. Considere la forma intencional en que el asesor pedagógico matemático desvía la conversación hacia un análisis de las ideas y el aprendizaje matemático que guiarán la enseñanza.

Como resultado de la plática sobre planificación, los maestros poseen una comprensión más cabal de los conceptos de adición y sustracción, misma que esperan hacer surgir durante la lección. Por ejemplo, esperan que sus estudiantes hagan una conexión entre los diagramas y las ecuaciones matemáticas y que comparen las estructuras matemáticas de los diversos tipos de problemas contextualizados. Al principio de la lección, analizan con los estudiantes la meta y la importancia de entender diferentes problemas enunciados con palabras mediante el uso de diagramas matemáticos y de ecuaciones. Durante la enseñan-



za, los maestros están al pendiente de garantizar que los educandos no sólo obtengan las respuestas a los problemas, sino que puedan explicar la manera en que cada problema se relaciona con la adición y la sustracción y cómo dicha relación se refleja en sus diagramas y ecuaciones. Esto a su vez los estimulará a que se centren en la manera en que tales problemas contextualizados se relacionan con la adición y la sustracción y el por qué esto es un aspecto importante de su aprendizaje de las matemáticas.

Acciones del docente y del estudiante

La enseñanza eficaz necesita una comprensión clara de lo que los estudiantes requieren para perfeccionarse matemáticamente. Las metas de aprendizaje claras centran el trabajo de enseñanza y el de aprendizaje del estudiante. Los docentes han de establecer metas claras y detalladas que indiquen las matemáticas que están aprendiendo los estudiantes; también necesitan emplear tales metas para guiar la toma de decisiones durante la enseñanza. Los alumnos también requieren comprender el propósito matemático de una lección. Los docentes habrán de auxiliar a los estudiantes a entender la forma en que ciertas actividades específicas contribuyen y apoyan el aprendizaje de las matemáticas de éstos conforme resulte apropiado durante la enseñanza. Los alumnos pueden entonces involucrarse y dar seguimiento a su propio progreso de aprendizaje. Las acciones listadas en la tabla siguiente brindan una guía sobre lo que los profesores y los estudiantes llevan a cabo para establecer y emplear las metas a fin de centrar el aprendizaje de las matemáticas en el salón de clase.

Establecimiento de metas matemáticas centradas en el aprendizaje, acciones del docente y del estudiante

¿Qué es lo que están haciendo los *docentes*?	¿Qué es lo que están haciendo los *alumnos*?
Establecen metas claras que articulan las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo, como resultado de la enseñanza de una lección, de una serie de lecciones o a lo largo de una unidad.	Se involucran en el análisis sobre el propósito y las metas matemáticos relacionados con su labor actual en la clase de matemáticas (verbigracia: ¿qué estamos aprendiendo?, ¿por qué lo estamos aprendiendo?).
Identifican la forma en que las metas se adecuan a un desarrollo de aprendizaje matemático.	Utilizan las metas de aprendizaje para enfocarse continuamente en el mejoramiento progresivo de su comprensión del contenido matemático y de la destreza en el empleo de las prácticas matemáticas.
Analizan y hacen referencia al propósito y la meta matemáticos de una lección durante el aprendizaje, a fin de garantizar que los estudiantes comprendan la manera en que el trabajo actual contribuye a su aprendizaje.	Vinculan su quehacer actual con las matemáticas que estudiaron con antelación y atisban hacia donde van las matemáticas.
Utilizan las metas matemáticas para guiar la planificación de la lección y para reflexionar, así como para tomar decisiones al instante durante el aprendizaje.	Evalúan y dan seguimiento a su propia comprensión y avance hacia las metas matemáticas de aprendizaje.

Implementación de tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas

La enseñanza eficaz de las matemáticas involucra a los estudiantes en tareas de resolución y análisis, las cuales promueven el razonamiento matemático y la resolución de problemas, además de que permiten que haya múltiples maneras de abordar los problemas y existan estrategias de resolución variadas.

La enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza las tareas como una manera para motivar el aprendizaje del estudiante y para ayudarlo a construir nuevo conocimiento matemático a través de la resolución de problemas. La investigación de las últimas dos décadas concerniente con la utilización de las tareas matemáticas ha redituado en tres importantes hallazgos:

1. No todas las tareas ofrecen las mismas oportunidades para el razonamiento y el aprendizaje del alumno (Hiebert *et al*. 1997; Stein et al. 2009).

2. El aprendizaje del estudiante es mayor en las clases donde las tareas fomentan de manera consistente su pensamiento y razonamiento de alto nivel; pero es menor en aquéllas en las que la naturaleza de las tareas son rutinariamente procedimentales (Boaler y Staples 2008; Hiebert y Wearne 1993; Stein y Lane 1996).

3. Las tareas que implican grandes exigencias cognitivas resultan las más complicadas de implementar en forma correcta y a menudo se convierten en tareas menos exigentes durante la enseñanza (Stein, Grover y Henningsen 1996; Stigler y Hiebert 2004).

Para garantizar que los alumnos tengan la oportunidad de comprometerse con un pensamiento de alto nivel, los docentes deben seleccionar e implementar en forma regular tareas que estimulen el razonamiento y la resolución de problemas. Dichas tareas alientan el razonamiento y el acceso a las matemáticas mediante diversas formas de abordar los problemas, que incluyen la utilización de variadas representaciones y herramientas, así como la resolución de problemas a través de diferentes estrategias de solución.

Es más, los docentes eficaces comprenden la forma en que pueden emplearse los contextos, la cultura, las condiciones y el lenguaje con el objeto de crear tareas matemáticas que traigan a colación el conocimiento previo y las experiencias anteriores de los estudiantes (Cross *et al*. 2012; Kisker *et al*. 2012; Moschkovich 1999, 2011), o que brinden a los estudiantes una experiencia común de la que surja su trabajo en las tareas matemáticas (Boaler 1997; Dubinsky y Wilson 2013; Wager 2012). Como resultado de los esfuerzos de los docentes por incorporar esos elementos dentro de las tareas matemáticas, el compromiso de los estudiantes para su resolución de éstas se vincula con mayor fuerza con su sentido de identidad, lo cual conduce a un compromiso creciente y a una motivación más tenaz hacia las matemáticas (Aguirrre, Mafield-Ingram y Martin 2013; Boaler 1997; Hogan 2008; Middleton y Jansen 2011).



Análisis

Las tareas matemáticas pueden abarcar desde un conjunto de ejercicios rutinarios hasta un problema complejo y desafiante que enfoque la atención de los educandos sobre una idea matemática particular. Stein y sus colegas (Stein, Grover y Henningsen 1996; Stein y Smith 1998) desarrollaron una taxonomía de las tareas matemáticas con base en el tipo y nivel de pensamiento requerido para solucionarlos. Smith y Stein (1998) exponen las características de las tareas de niveles altos y bajos, además de proporcionar ejemplos de cada categoría. La figura 3 reproduce su lista de características de las tareas en cuatro niveles de exigencia cognitiva y la figura 4 ofrece ejemplos de tareas en cada uno de los niveles.

Niveles de exigencias

Exigencias de bajo nivel (memorización):

- Incluyen la reproducción de memoria de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos.
- No se pueden resolver mediante procedimientos porque no existen o porque el tiempo asignado para completar la tarea es muy breve para emplear un procedimiento.
- No son ambiguas. Dichas tareas involucran la reproducción exacta de material visto con antelación y aquello que se ha de reproducir se establece con claridad y de manera directa.
- No tienen relación con los conceptos o el significado subyacente a los hechos, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.

Exigencias de bajo nivel (procedimientos sin conexiones):

- Son algorítmicas. Usan el procedimiento que se requiere de manera específica o que es evidente a partir de instrucciones, de experiencias o de la asignación de tarea previamente establecidas.
- Requieren una exigencia cognitiva limitada para su exitosa consumación. Hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita llevar a cabo y sobre cómo hacerlas.
- No guardan relación con conceptos o con el significado subyacente al procedimiento empleado.
- Se enfocan en generar respuestas correctas, en lugar de desarrollar la comprensión matemática.
- No requieren explicaciones o éstas se centran solamente en la descripción del procedimiento utilizado.

Exigencias de alto nivel (procedimientos con conexiones):

- Enfoca la atención del estudiante en la utilización de procedimientos, con el propósito de desarrollar niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticos.
- Sugiere seguir caminos implícitos o explícitos, los cuales son procedimientos muy generales que tienen estrechas relaciones con ideas conceptuales subyacentes, en contraposición con los limitados algoritmos que son poco claros respecto de los conceptos subyacentes.
- Suelen representarse en multitud de formas, tales como diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y problemas contextualizados. Llevan a cabo conexiones entre una gran cantidad de representaciones que ayudan a desarrollar el significado.
- Necesitan cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden seguirse procedimientos generales, no se puede hacer en forma irreflexiva. Los alumnos requieren involucrarse con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos (con el objeto de finalizar la tarea con éxito) y que desarrollan su comprensión.

Exigencias de alto nivel (construcción de las matemáticas):

- Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico; la tarea, sus instrucciones o un ejemplo resuelto no sugieren en forma explícita un enfoque o camino predecible y trillado.
- Demandan que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos matemáticos, así como los procesos o relaciones.
- Requieren la autoverificación o la autorregulación de los procesos cognitivos de uno.
- Necesitan que los estudiantes tengan acceso al conocimiento o experiencias relevantes y que hagan un uso apropiado de ambas cosas al estar trabajando en la tarea.
- Exigen que los estudiantes analicen la tarea y examinen de manera activa las restricciones de ésta que pudieran limitar las posibles estrategias de solución y las soluciones mismas.

- Requieren un esfuerzo cognitivo significativo y pudieran entrañar un nivel de ansiedad para los estudiantes, debido a la naturaleza impredecible de los procesos de solución necesarios.

Estas características se deducen del trabajo de Doyle concerniente con las tareas académicas (1988) y del de Resnick sobre las habilidades de pensamiento de alto nivel (1987), así como de los *Professional Standards for Teaching Mathematics* [Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas] (*NCTM* 1991), y del examen y la categorización de cientos de tareas utilizadas en los salones de clase *QUASAR* (Stein, Grover y Henningsen 1996; Stein, Lane y Silver 1996).

Fig. 3. Características de las tareas matemáticas en cuatro niveles de exigencia cognitiva. Tomado de Smith y Stein (1998)

Exigencias de bajo nivel

Memorización

¿Cuál es la regla para multiplicar fracciones?

Respuesta esperada del estudiante:

Multiplicas el numerador por el numerador y el denominador por el denominador

o

Multiplicas los dos números de arriba y luego los dos de abajo.

Procedimientos sin conexiones

Multiplica:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$$

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{5}$$

Respuesta esperada del estudiante:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{5 \times 7}{6 \times 8} = \frac{35}{48}$$

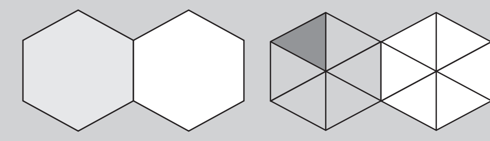
$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{9 \times 5} = \frac{12}{45}$$

Exigencias de alto nivel

Procedimentos con conexiones

Calcula el producto de 1/6 por 1/2. Usa los diagramas. Dibuja la respuesta y explica tu solución.

Respuesta esperada del estudiante:



Primero determinas la mitad del todo, lo cual será igual a un hexágono. Luego tomas un sexto de esa mitad. Después dividí el hexágono en seis partes, lo cual equivaldría a seis triángulos. Sólo necesitaba un sexto, así que sería un solo triángulo. Luego necesitaría saber qué parte de los dos hexágonos equivaldría a un triángulo, lo cual es 1 de 12. Así que 1/2 de 1/6 es 1/12.

Construcción de las matemáticas

Plantea una situación real para el siguiente problema:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

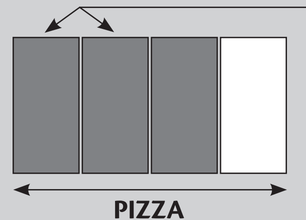
Resuelve el problema que planteaste sin usar la regla y explica tu solución.

Una posible respuesta del alumno:

Mi mamá me dio para el recreo tres cuartas partes de una pizza que habíamos pedido. Sólo pude terminarme dos terceras partes de lo que me dio. ¿Qué parte de toda la pizza comí?.

Dibujé un rectángulo para representar toda la pizza. Luego la dividí en cuartos e iluminé tres de ellos para representar la parte que mi mamá me dio. Ya que sólo comí dos tercios de lo que me dio, eso sólo sería dos de las secciones iluminadas.

1. Mi mamá me dio la parte iluminada.



2. Esto es lo que comí en el recreo. Así que 2/3 de 3/4 es lo mismo que la mitad de la pizza.

Fig. 4. Tareas ejemplo de cuatro niveles de exigencia cognitiva. Tomado de Smith y Stein (1998).

Desde el punto de vista de esta taxonomía, las tareas matemáticas se conciben como las que plantean exigencias cognitivas de *alto nivel* a los estudiantes, cuando les permiten comprometerse con una investigación y una exploración activas o cuando animan a los alumnos a que empleen procedimientos en formas que se vinculen de maneras significativas con los conceptos o con la labor de comprensión. Las tareas que alientan a los estudiantes a utilizar procedimientos, fórmulas o algoritmos en formas que no se relacionen de manera activa con el significado o que se apoyan fundamentalmente en la memorización o en la reproducción de hechos antes memorizados, se considera que plantean a los estudiantes exigencias cognitivas de *bajo nivel*. Observe la figura 5, que muestra dos tareas, ambas podrían utilizarse en una unidad de álgebra que incluya el análisis y la resolución de un sistema de dos ecuaciones simultáneas.

Tarea A: planes tarifarios para teléfonos celulares inteligentes	**Tarea B: resolución de sistemas de ecuaciones**
Estás tratando de decidir cuál de dos planes convendría más. El plan A cobra una renta básica de $300 al mes y $1 por mensajes de texto. El plan B cobra una renta mensual de $500 y $0.50 por mensaje de texto. ¿Cuántos mensajes de texto se necesitaría mandar al mes con el plan B, para que fuese la mejor opción? Justifica tu decisión. (Adaptado de *Illustrative Mathematics Illustrations:* www.illustrativemathematics.org/illustrations/469.)	Resuelve cada uno de los siguientes sistemas: $-4x - 2y = -12$ $4x + 8y = -24$ $x - y = 11$ $2x + y = 19$ $8x + y = -1$ $-3x + y = -5$ $5x + y = 9$ $10x - 7y = -18$

Fig. 5. Comparación de tareas con distinta exigencia cognitiva

La tarea A es de alto nivel, ya que no se sugirió ni está implícita ninguna ruta específica, de modo que los estudiantes podrían utilizar diversos enfoques para abordar y resolver la tarea (por ejemplo: adivinar y verificar, hacer una tabla, graficar ecuaciones a fin de encontrar el punto de intersección, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales utilizando el álgebra). Es más, los educandos deben esforzarse para determinar y llevar a cabo un curso de acción, así como justificar lo razonable y exacto de sus soluciones. Por el contrario, la tarea B es de bajo nivel ya que probablemente se espera que los estudiantes utilicen un procedimiento específico memorizado con poca o ninguna ambigüedad sobre lo que requieren hacer. Las matemáticas que los estudiantes pueden aprender al ejecutar tareas de alto nivel son marcadamente distintas de las que pueden aprender de las tareas de bajo nivel. A la larga, el efecto acumulativo de la utilización de las tareas matemáticas redunda en el desarrollo implícito de las ideas que los estudiantes tienen en torno a la naturaleza de las matemáticas: si esta disciplina es algo que personalmente ellos puedan darle sentido y durante cuánto tiempo y qué tan arduamente deben trabajar para resolver cualquier tarea matemática.

Es importante observar que no todas las tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas deben ubicarse en un contexto o requieren consumir toda una clase o varios días. Lo que resulta esencial es que una tarea ofrezca a los educandos la oportunidad

de comprometerse en forma activa con el razonamiento, con el dar sentido y con la resolución de problemas, de manera que desarrollen una comprensión profunda de las matemáticas. Véase por ejemplo la tarea de las funciones exponenciales mostrada en la figura 6, que demanda de los educandos el análisis de las funciones mediante representaciones visuales. Al trabajar en esta tarea, exploran lo que sucede a la gráfica de la función cuando cambian los valores de *a* y mediante la utilización de representaciones, generalizan el comportamiento de la función.

Mediante una calculadora graficadora, investiga los cambios que ocurren en la gráfica de $y = a^x$ para distintos valores de *a*, donde *a* es cualquier número real. Explica lo que pasa en los siguientes casos:

(1) $a > 1$

(2) $a = 1$

(3) $0 < a < 1$

(4) $a = 0$

(5) $a < 0$

Fig. 6. Una tarea de álgebra que requiere que los estudiantes utilicen representaciones gráficas para analizar las funciones exponenciales

Esta tarea fomenta la resolución de problemas, pues se ubica a los alumnos en una posición en la que explorarán la problemática, pero sin que se les mencione por anticipado lo que se espera. Al reflexionar sobre esta tarea, es probable que determinen la forma general de la gráfica de la función (es decir, cuando $a > 1$, la gráfica comienza a "aplanarse" y se aproxima al eje *x*, para luego dispararse hacia arriba; cuando $0 < a < 1$, la gráfica muestra una función que se encoge con rapidez), así como lo que ocurre en 0 y 1 y establezca la diferencia entre una función creciente y una decreciente. Al ampliar este análisis cuando $a < 0$, se ofrece una valiosa oportunidad a los estudiantes de aprender por qué las funciones exponenciales están limitadas a que $a \geq 0$.

Las tareas que comprometen a los alumnos con el razonamiento y la resolución de problemas no se limitan al contenido de las escuelas de enseñanza media y media superior. Considérese la tarea de la figura 7, en la que los estudiantes de preescolar y grado 1 descomponen de varias formas el 10 en pares de números.

En un estacionamiento hay 10 automóviles. Algunos son rojos y otros negros. ¿Cuántos carros rojos y cuántos negros podría haber en el estacionamiento?

Piensa todas las combinaciones de automóviles que puedas.

Muestra tus soluciones de tantas maneras como puedas mediante cubos, diagramas o palabras; además, escribe una ecuación para cada solución.

Fig, 7. Una tarea para los grados de preescolar y primero, concerniente con las parejas de números que forman el 10. Adaptado del Departamento de Educación Pública de Carolina del Norte; http://commoncoretask.ncdpi.wikispaces.net/First+Grade+Tasks.

En este problema los educandos identifican una o más combinaciones que sean iguales a 10, por medio de diagramas, cubos u otras herramientas (verbigracia: dedos, marcos decimales, Rekenrek), conforme las requieran para reforzar su labor de resolución de problemas y su explicación. Ésta es una tarea de alto nivel para la mayoría de los alumnos de los grados de preescolar y primero, pues aún no han aprendido tales combinaciones; además pueden emplear una variedad de estrategias (es decir: prueba y error, contar hasta 10 a partir de un número seleccionado, descomponer a 10 en dos conjuntos), con el objeto de determinar las combinaciones que funcionarán. Quizá los estudiantes reconozcan combinaciones semejantes a través del proceso de resolución de esta tarea (por ejemplo: $4 + 6 = 6 + 4$) y comiencen a percibir patrones numéricos (es decir: $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$; si un número aumenta una unidad, entonces el otro número disminuye una unidad).

Al determinar el nivel de la tarea, resulta importante considerar el conocimiento previo, así como las experiencias anteriores de los alumnos que abordarán dicha tarea. Al principio, las tareas pueden ser de alto nivel para los estudiantes que están recién aprendiendo las matemáticas subyacentes a la tarea (por ejemplo: sistemas de ecuaciones lineales, comportamiento de las funciones, combinaciones de números). A la larga, conforme los educandos reafirman su comprensión de las matemáticas subyacentes, dichas tareas pudieran significar para ellos experiencias más rutinarias. Consecuentemente, los estudiantes necesitarán tareas que amplíen más esas ideas matemáticas en formas que continúen profundizando su comprensión y reforzando el razonamiento matemático y su habilidad de resolver problemas.

Ejemplo

Aunque la selección de tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas constituye un primer paso fundamental, asignarlas a los estudiantes no garantiza que en verdad se involucren en una tarea de alto nivel. Considérese la comparación que se muestra en la figura 8 cuando se implementa la tarea A (planes tarifarios para teléfonos celulares inteligentes), mostrada en la figura 5, en dos clases de álgebra.

Observe que a pesar de que la profesora Cisneros utiliza una tarea que pudiera fomentar el razonamiento, tan pronto como se percata de que los estudiantes están bregando con la tarea, les ofrece una manera de resolverla. Al adjudicarse el razonamiento de sus estudiantes, la profesora Cisneros les quita la oportunidad de involucrarse con mayor profundidad y de una forma más significativa con las matemáticas, limitándolos simplemente a que apliquen un procedimiento específico.

En contraposición, cuando la profesora Martínez observa que sus estudiantes están batallando para deducir lo que se debe hacer, les proporciona sugerencias que les ayudarán a avanzar en la tarea, pero sin darles un camino específico para que lo sigan. Éste es el enfoque que la *NCTM* (2000 p.19) ha defendido por mucho tiempo:

> *Los docentes deben decidir los aspectos de una tarea en los que harán énfasis, la manera de organizar y organizar el trabajo de los estudiantes, las preguntas que se plantearán para desafiar a los que tengan diversos niveles de dominio, así como la manera de apoyar a los alumnos, sin apropiarse de su proceso de pensamiento y en consecuencia suprimiendo el desafío.*

Como resultado de la forma en que la maestra Martínez organiza la lección, los estudiantes tienen la oportunidad de tomar en cuenta diversas estrategias y comprometerse en la

solución del problema matemático con un alto nivel de exigencia cognitiva. Por otra parte, y que es lo más importante, se alienta a los estudiantes para que profundicen su conocimiento de las ecuaciones lineales y de lo que significa el punto de intersección, tanto de manera gráfica como contextual.

Conforme los estudiantes de dos clases de álgebra comienzan a trabajar con sus compañeros en los planes tarifarios de celulares, se hace evidente que les está costando trabajo empezar.

Clase de la profesora Cisneros

La maestra Cisneros reúne a sus alumnos y les indica que primero necesitan escribir unas ecuaciones para ambos planes. Escribe en el pizarrón $y = mx + b$ y les pregunta a sus alumnos lo que significaría m y b para cada plan tarifario. Una vez que ya plantearon las dos ecuaciones, va al pizarrón y escribe una tabla con tres columnas: x (la cantidad de mensajes), $y1$ (el costo en el plan A) y $y2$ (el costo en el plan B). Sugiere que comiencen con una cantidad de mensajes igual a 0 y luego aumenten en la tabla los valores de x de 10 en 10. Los estudiantes retoman junto con sus compañeros el trabajo y completan con facilidad la tabla, identificando el punto de intersección (400, 70) de las dos ecuaciones.

Clase de la profesora Martínez

La maestra Martínez plantea preguntas a sus alumnos conforme camina por el salón. Cuando se percata que les cuesta trabajo empezar, les pregunta cuánto costará mandar un mensaje de texto en cada plan. Esta pregunta le permite asegurarse de que los estudiantes comprenden la relación existente entre la cantidad de mensajes, el costo por mensaje y la tarifa básica. Les pregunta qué plan costará más para una cantidad específica de mensaje y les pide que consideren si el costo de ese plan siempre será mayor. Luego permite que entre ellos analicen la manera de utilizar esta información para resolver el problema. Conforme los alumnos siguen trabajando, observa los distintos enfoques, escucha los debates respecto de que si la respuesta es 400 o 401 mensajes y planifica la forma de dar secuencia a la puesta en común, con el objeto de analizar y comparar las distintas estrategias.

Fig. 8. Una mirada al interior de dos clases de álgebra con la implementación de los planes tarifarios para celulares (tarea A de la fig. 5).

Acciones del docente y el estudiante

Para que los educandos aprendan matemáticas entendiéndolas hay que brindarles oportunidades para que se comprometan regularmente con tareas que se enfoquen en el razonamiento y en la solución de problemas, así como facilitar que haya múltiples formas de abordar los problemas y que haya variadas estrategias de solución. Las acciones listadas en la siguiente tabla proporcionan un resumen de lo que los docentes y los estudiantes requieren hacer cuando se implementan en el salón de clases dichas tareas. Resulta importante observar que las tareas que se enfocan en el aprendizaje y en la aplicación de procedimientos tienen un lugar en el currículo y son necesarias para desarrollar un dominio. No obstante, dichas tareas no deben ser dominantes en el aprendizaje ni tener preferencia exclusiva respecto del uso de las tareas que fomenten el razonamiento. Más bien, esas tareas deben erigirse y emerger a partir de las experiencias de dar sentido a los problemas y resolverlos.



Implementación de tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas **Acciones de docentes y estudiantes**	
¿Qué es lo que los *docentes* están haciendo?	**¿Qué es lo que los *estudiantes* están haciendo?**
Motivan el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes al brindar oportunidades para explorar y resolver problemas que construyan y amplíen su actual comprensión matemática. Seleccionan tareas que proporcionen diferentes formas de abordar los problemas mediante el empleo de variadas herramientas y representaciones. Suelen plantear tareas que requieren un alto nivel de exigencia cognitiva. Apoyan a los estudiantes cuando exploran las tareas, pero sin adueñarse de su razonamiento. Alientan a los estudiantes para que utilicen diversos enfoques y estrategias con el objeto de que les den sentido a las tareas y las resuelvan.	Perseveran en la indagación y el razonamiento de las tareas. Asumen la responsabilidad de dar sentido a las tareas al recurrir y vincularlas con sus conocimientos previos y sus ideas anteriores. Utilizan herramientas y representaciones conforme las necesiten, a fin de apoyar su razonamiento y resolver problemas. Aceptan y esperan que sus compañeros usen una gama de enfoques para la solución; además, entre ellos analizarán y justificarán sus estrategias.

Uso y vinculación de las representaciones matemáticas

La enseñanza eficaz de las matemáticas obliga a los estudiantes a establecer conexiones entre representaciones matemáticas para profundizar el entendimiento de conceptos y procedimientos matemáticos, así como para concebir a ambos como herramientas para la resolución de problemas.

La enseñanza eficaz de las matemáticas implica enfocarse meticulosamente en la utilización de diversas representaciones matemáticas. El *NCTM* (2000) subrayó el importante papel de las representaciones matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas al incluir los *Estándares de procesos para la representación* en su documento *Principios y estándares para la educación matemática*. Las representaciones involucran características fundamentales de los constructos y las acciones matemáticos, como dibujar diagramas y utilizar palabras para mostrar y explicar el significado de las fracciones, las razones o la operación de multiplicación. Cuando los estudiantes aprenden a representar, analizar y hacer conexiones entre las ideas matemáticas de múltiples formas, demuestran un entendimiento matemático más profundo, así como el progreso de sus habilidades para resolver problemas (Fuson, Kalchman y Bransford 2005; Lesh, Post y Behr 1987).

Análisis

El esquema general de clasificación para los tipos de representación mostrados en la figura 9 señala conexiones importantes habidas entre las formas de representación contextual, visual, verbal, física y simbólica (Lesh, Post y Behr 1987). Tripathi (2008) observó que el uso de estas "distintas representaciones es como examinar el concepto a través de una variedad de lentes, en donde cada uno ofrece una perspectiva distinta que hace que la imagen (el concepto) sea más rica y profunda" (p. 439). Los estudiantes, especialmente los jóvenes, también se benefician con la utilización de objetos físicos o con la representación de procesos durante la resolución de problemas (*National Research Council* 2009).

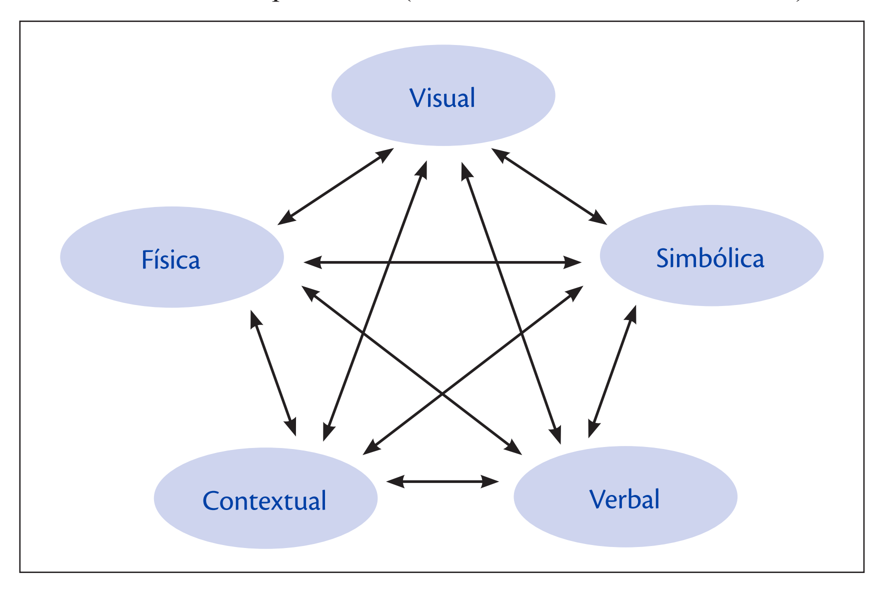


Fig. 9. Conexiones importantes entre las representaciones matemáticas

Según el Consejo Nacional de Investigación [2001] (*National Research Council*) "en vista de la naturaleza abstracta de las matemáticas, las personas tienen acceso a las ideas matemáticas sólo mediante las representaciones de dichas ideas" (p. 94). El grado de profundidad de la comprensión se relaciona con la solidez de las conexiones entre las representaciones matemáticas que los estudiantes hayan interiorizado (Pape y Tchoshanov 2001; Webb, Boswinkel y Dekker 2008). Por ejemplo, los alumnos desarrollan la comprensión del significado de la fracción 7/4 (forma simbólica) cuando pueden verla como una cantidad formada por "7 partes del tamaño de 1/4" mediante una barra fraccionaria o cuando la observan sobre una recta numérica (forma visual), o al medir una cuerda que tenga como longitud 7 cuartos de metro (forma física).

Las representaciones visuales revisten una particular importancia en la clase de matemáticas al ayudar a los educandos a mejorar su comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, al dar sentido a los problemas y al involucrarlos en el discurso matemático (Arcavi 2003; Stylianou y Silver 2004). Estas representaciones ayudan a la resolución de problemas en la medida en que los estudiantes tomen en cuenta las relaciones entre las cantidades cuando bosquejen diagramas o elaboren tablas y gráficas. Las representaciones visuales también apoyan el discurso, pues los diagramas o dibujos dejan una huella de la resolución del problema por parte del estudiante, misma que puede exhibirse,



criticarse y analizarse. Los diagramas matemáticos, así como otros apoyos visuales, son de particular importancia para aquellos que están aprendiendo inglés, para los que tienen necesidades especiales o los educandos con dificultades, pues permiten que participen de manera significativa más estudiantes en el discurso matemático dentro del salón de clases (Fuson y Murata 2007). Las representaciones visuales auxilian a los alumnos en dar seguimiento al razonamiento de sus compañeros de clase y al darles voz a sus propias explicaciones conforme señalan las partes de sus diagramas matemáticos y de otras representaciones visuales.

La comprensión de los estudiantes se profundiza mediante el análisis de las similitudes existentes en aquellas representaciones que revelan estructuras matemáticas subyacentes o características esenciales de las ideas matemáticas que persisten, independientemente de la forma (Zimba 2011). Por ejemplo, las fracciones se forman mediante la iteración de fracciones unitarias, una estructura que puede identificarse y analizarse cuando los estudiantes utilizan tiras de papel como modelos de fracciones, dibujan modelos de barras fraccionarias o rectas numéricas, o cuando emplean símbolos. De igual forma, la adición de fracciones tiene una estructura similar a la de la suma de números enteros, en la medida en que todas las adiciones implican la combinación de unidades del mismo tamaño, como la suma de decenas con decenas, o de doceavos con doceavos. Asimismo, puede analizarse y hacerse énfasis en la estructura matemática pidiendo a los alumnos que traduzcan o alternen a discreción varias representaciones, como: vincular los símbolos de nuevo con los contextos (por ejemplo, describir una situación real para 3×29 o $y = 3x + 5$), elaborar una tabla de valores para una razón dada, o hacer una gráfica con base en la información de una tabla (Greeno y Hall 1997).

El éxito en la resolución de problemas también se relaciona con la habilidad de los estudiantes para moverse dúctilmente entre las representaciones (Huinker 2013; Stylianou y Silver 2004). Deben ser capaces de abordar un problema desde distintos puntos de vista y se les debe alentar a que cambien las representaciones hasta que sean capaces de comprender la situación y recorrer un camino que les conduzca a una solución. Lo anterior implica que los estudiantes conciben las representaciones como herramientas que pueden emplear para ayudarles a resolver problemas, más que como un fin en sí mismo. Si por el contrario, los mosaicos algebraicos o los bloques decimales no se emplean de manera significativa, verbigracia, los alumnos quizá consideren que la utilización de objetos físicos constituye la meta, en lugar de llegar a comprender cómo los mosaicos les permiten dar sentido a los polinomios o la forma en que los bloques decimales muestran la estructura del sistema de numeración de base diez.

Ejemplo

La competencia de los estudiantes para hacer representaciones puede desarrollarse mediante la enseñanza. Marshall, Superfine y Canty (2010 p. 40) proponen tres estrategias específicas:

1. Fomentar una selección deliberada de representaciones.
2. Involucrarse en un diálogo respecto de las conexiones explícitas entre las representaciones.
3. Alternar la dirección de las conexiones establecidas entre las representaciones.

Obsérvese la lección presentada en la figura 10 y enfoque su atención en la manera en que el maestro Hernández utiliza esas estrategias con sus estudiantes de tercer grado, conforme representan y resuelven un problema que plantea la colocación de sillas para un concierto de una banda escolar.

La clase de tercer año de primaria está encargada de acomodar las sillas para el concierto de primavera de la banda. Para su preparación, deben determinar el número total de sillas que se necesitarán y pedirle al conserje de la escuela que las traiga de la bodega central.

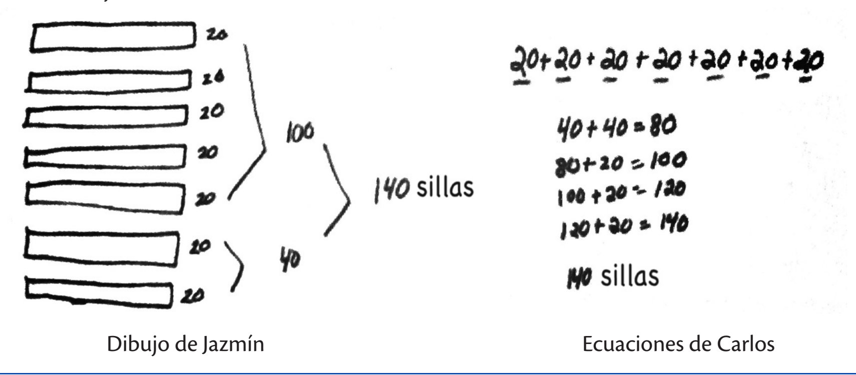
El profesor Hernández les explica que necesitan colocar 7 filas con 20 sillas cada una, dejando un espacio para un pasillo central. Después les pide que piensen en la forma de representar el problema: "Antes de que comiencen a trabajar en la tarea, piensen en la representación que quisieran usar y justifíquenla, luego expresen e intercambien sus ideas con un compañero".

Los estudiantes se ponen a trabajar en la tarea. La mayoría dibuja conjuntos iguales o descompone modelos de áreas. Dos alumnos cortan de una hoja de papel cuadriculado una distribución. Unos cuantos estudiantes hacen una tabla, o diagrama en forma de T, listando el número de filas con sus sillas correspondientes. Algunos utilizan enfoques simbólicos, como la adición iterativa o los productos parciales.

Unos cuantos más cambian de representaciones mientras trabajan. Daniela comienza dibujando palitos pero luego cambia a una tabla. Cuando el profesor Hernández le pregunta el por qué, ella explica que se cansó de dibujar todos esos palitos. De igual manera, Jaime comienza construyendo un arreglo con cubos interconectados, pero después dibuja el arreglo. Estos intentos iniciales resultan valiosos, si no esenciales, para ayudar a cada uno de los estudiantes a darle sentido a la situación.

Conforme los alumnos trabajan, el docente plantea preguntas deliberadas a fin de incitarlos a que consideren las características esenciales de sus representaciones: "¿cómo es que tu dibujo muestra 7 grupos?", "¿por qué estás añadiendo estas veintenas?", "¿cuántas veintenas estás agregando y por qué?"

Antes de llevar a cabo la puesta en común ante el grupo, el profesor Hernández pide a los estudiantes que se reúnan con un compañero que usó una representación distinta y los orienta para que expliquen y comparen, por turnos, su trabajo y su solución. Por ejemplo, Jazmín, que elaboró el dibujo que está abajo a la izquierda, compara su trabajo con Carlos, trabajo de abajo a la derecha, quien utilizó ecuaciones. Luego el docente les pide que repitan la dinámica, buscando otros compañeros para llevar a cabo otra sesión donde comparen y compartan sus trabajos.



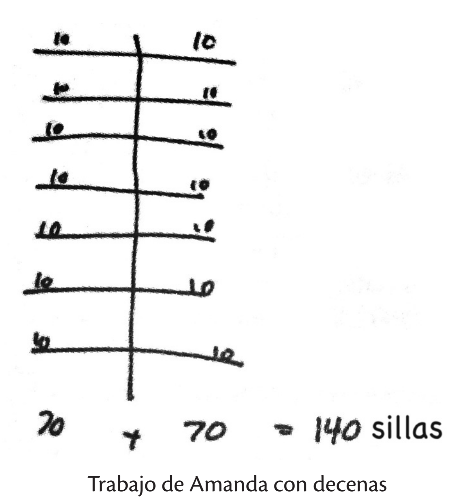
Dibujo de Jazmín

Ecuaciones de Carlos

Fig. 10 Una lección de tercer año en la que se resalta el uso de representaciones matemáticas para resolver una tarea de acomodo de sillas para un concierto.

El profesor comienza el análisis con todo el grupo resumiendo la meta de la lección, la cual consiste en que se comprenda la forma en que diversas representaciones se relacionan con la multiplicación. Primero solicita a los estudiantes que identifiquen y expliquen la forma en que distintas representaciones visuales –las cuales muestran grupos iguales y la cantidad que contienen cada uno– simbolizan una estructura de la multiplicación. Lo anterior propicia que los estudiantes comparen los diagramas que tienen grupos iguales, arreglos y modelos de área, analizando sus similitudes y diferencias. Los estudiantes comentan que en algunos diagramas es sencillo ver la cantidad de sillas de cada fila, pero en otros no. A continuación el profesor Hernández escribe en el pizarrón 7 × 20 y les pide a sus alumnos que expliquen de qué forma se equipara esta expresión con los diagramas.

Por último, el maestro Hernández les pide que analicen y comparen las representaciones de aquellos que tomaron en cuenta el pasillo central y trabajaron con decenas y no con veintenas, como Amanda cuyo diagrama se muestra abajo. Les pide que den este último paso, considerando que esta experiencia y este análisis informales de la propiedad distributiva serán importante para futuras lecciones.



Trabajo de Amanda con decenas

El profesor Hernández elige esta tarea sobre las sillas para el concierto con el objeto de enfocarse en un problema contextual que pueda representarse mediante arreglos. La meta de esta lección es que los estudiantes comprendan la forma en que la estructura de la multiplicación resulta evidente en distintas representaciones. Elige las cantidades a propósito para imbuir en sus alumnos el entendimiento conceptual de la multiplicación de números enteros de un dígito por múltiplos de 10, utilizando estrategias basadas en el valor posicional y en las propiedades de las operaciones. Permite a sus alumnos escoger y analizar sus elecciones para representar la situación del problema. El docente pone especial atención en lo que están haciendo los estudiantes; además, las preguntas que les plantea mientras trabajan y durante la sesión plenaria les ayudan a hacer conexiones explícitas entre las representaciones, de formas que favorecen su comprensión de las ideas matemáticas centrales de la lección.

Acciones del docente y del estudiante

La enseñanza eficaz hace hincapié en el uso y la formación de conexiones entre las representaciones matemáticas para: profundizar la comprensión por parte del estudiante de los conceptos y procedimientos, apoyar el diálogo matemático entre los estudiantes y para que

sirvan como herramientas en la resolución de problemas. En la medida que los estudiantes utilicen y hagan conexiones entre las representaciones contextuales, físicas, visuales, verbales y simbólicas, se fortalecerá su concepción de las matemáticas en cuanto a que es una disciplina unificada y coherente. Las acciones del docente y del alumno listadas en la tabla siguiente proporcionan un resumen de lo que ambos hacen al utilizar las representaciones matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Uso y vinculación de las representaciones matemáticas Acciones del docente y del estudiante	
¿Qué es lo que los *docentes* están haciendo?	**¿Qué es lo que los *estudiantes* están haciendo?**
Seleccionan tareas que permitan a los estudiantes decidir las representaciones que utilizarán para dar sentido a los problemas. Asignan un tiempo sustancial de la enseñanza para que los alumnos usen, analicen y hagan conexiones entre las representaciones. Piden a los estudiantes que elaboren diagramas matemáticos o utilicen otros apoyos visuales a fin de explicar y justificar su razonamiento. Centran la atención de los estudiantes en la estructura de las ideas matemáticas o en las características esenciales de éstas que emergen, independientemente de su representación. Diseñan formas a fin de hacer surgir y evaluar las capacidades de los estudiantes para emplear significativamente representaciones en la resolución de problemas.	Utilizan variadas formas de representaciones para dar sentido a las matemáticas y entenderlas. Describen y justifican su comprensión y razonamiento matemáticos mediante dibujos, diagramas y otras representaciones. Eligen sobre las formas de representaciones que utilizan como herramientas para la resolución de problemas. Esbozan diagramas para dar sentido a los problemas contextualizados. Contextualizan las ideas matemáticas al vincularlas con situaciones de la realidad. Tienen en cuenta las ventajas o la conveniencia de emplear varias representaciones cuando resuelven problemas.

Favorecimiento del discurso matemático significativo

La enseñanza eficaz de las matemáticas promueve el diálogo entre los estudiantes a fin de que puedan construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de sus enfoques y argumentos.

La enseñanza eficaz de las matemáticas compromete a los estudiantes con la elaboración de un discurso, de modo que toda la clase avance en el aprendizaje matemático. El discurso matemático incluye el intercambio deliberado de ideas mediante el análisis grupal y a través de otras formas de comunicación: verbal, visual y escrita. El discurso en el salón de clases brinda a los estudiantes la oportunidad de compartir ideas y clarificar su comprensión, de construir argumentos convincentes respecto del cómo y el por qué las cosas funcionan, de desarrollar un lenguaje para expresar las ideas matemáticas y de aprender a mirar las cosas desde otra perspectiva (*NCTM* 1991, 2000).



Análisis

El discurso que se enfoca en las tareas que estimulan el razonamiento y la resolución de problemas es un mecanismo esencial para desarrollar la comprensión conceptual y el aprendizaje significativo de las matemáticas (Michaels, O'Connor y Resnick 2008). De acuerdo con Carpenter, Franke y Levi (2003, p. 6):

> *Los estudiantes que aprenden a articular y justificar sus propias ideas matemáticas, a razonar mediante explicaciones matemáticas propias y ajenas y a ofrecer una exposición razonada de sus respuestas, desarrollan una comprensión profunda que resulta fundamental para su éxito futuro, tanto en las matemáticas como en áreas relacionadas.*

Aunque el discurso ofrezca a los estudiantes valiosas oportunidades para aprender lo que son las matemáticas *y* cómo uno las va construyendo, el establecimiento en las clases de matemáticas de una cultura del discurso no está exenta de retos. Los docentes deben determinar el modo de construir y de respetar el pensamiento del estudiante, asegurando a la vez que las ideas matemáticas, que son la esencia de la lección, sigan teniendo un lugar prominente en las puestas en común (Engle y Conant 2002). Por ejemplo, al organizar una puesta en común sobre los enfoques de los estudiantes para resolver una tarea, el docente ha de decidir qué enfoque se compartirá, el orden en que los estudiantes deben compartirlo y plantear las preguntas que los ayudarán a realizar conexiones entre las diversas estrategias y las ideas clave de la materia, las cuales representan el hilo conductor de la lección. Tales puestas en común pueden convertirse con facilidad en poco más que refinadas sesiones de "mostrar y hablar" (Wood y Turner-Vorbeck 2001), en las que no resulta evidente lo que cada solución aporta al desarrollo de la comprensión de los estudiantes o el modo en que hace progresar el argumento matemático de la lección. Smith y Stein (2011) describen cinco prácticas para que se utilicen de manera efectiva las respuestas de los estudiantes en las puestas en común:

1. *Anticipar* las respuestas de los estudiantes antes de la lección.
2. *Supervisar* el trabajo de los alumnos e involucrarlos en las tareas.
3. *Seleccionar* a algunos estudiantes para que muestren su trabajo matemático.
4. *Dar una secuencia* con un orden específico a las respuestas de los estudiantes para analizarlas.
5. *Relacionar* las distintas respuestas de los estudiantes y vincularlas con ideas matemáticas clave.

Como parte del discurso comunitario, los estudiantes también deben tener la oportunidad de hablar, responder y cuestionarse entre ellos, de manera que sean un apoyo para el aprendizaje matemático de cada compañero de clase. Hufferd-Ackles, Fuson y Sherin (2004) describen el marco teórico para lograr que progrese una clase comunitaria enfocada en el discurso. Examinan la manera en que los docentes y los alumnos pasan por niveles al cambiar de una clase en la que los maestros desempeñan el papel protagónico en la búsqueda del pensamiento matemático de los estudiantes a otra en la que se ayuda a los educandos a asumir papeles importantes. El marco teórico describe un crecimiento en cinco componentes (Hufferd-Ackles, Fuson y Sherin 2014):

1. La manera en que el docente apoya el compromiso del alumno.
2. Quién hace las preguntas y qué tipos de preguntas plantea.
3. Quién proporciona las explicaciones y la naturaleza de las mismas.
4. Cómo se emplean las representaciones matemáticas.
5. Qué grado de responsabilidad comparten los estudiantes en el aprendizaje de sus compañeros y de ellos mismos.

La figura 11 muestra una tabla elaborada por Hufford-Ackles, Fuson y Sherin (2014) en la que se describen los niveles del discurso del grupo a través de los cuales los docentes y alumnos avanzan.

Ejemplo

El profesor Domínguez y sus alumnos de séptimo grado están estudiando las relaciones proporcionales y su utilización en la resolución de problemas matemáticos de la realidad. Como parte de su trabajo el profesor quiere que sus educandos sean capaces de identificar relaciones multiplicativas entre cantidades y que reconozcan tres estrategias para resolver dichos problemas: incremento de valores, factor de escala y razón unitaria. Para su clase seleccionó la tarea de la bombonera, lo cual se ilustra en la figura 12, en vista de que se ajusta a las metas, ofrece la oportunidad de hacer razonamientos de alto nivel y brinda diversas formas de abordar el problema. La figura 13 presenta la lección del profesor Domínguez sobre la bombonera.

Supongan que en una bombonera nueva hay la misma proporción de caramelos que de chocolates, como se muestra en el dibujo, y que en ella hay 100 caramelos.

¿Cuántos chocolates hay?

Justifiquen su respuesta.

Nota: en el dibujo, los caramelos se representan con 5 rectángulos y los chocolates con 13 círculos.

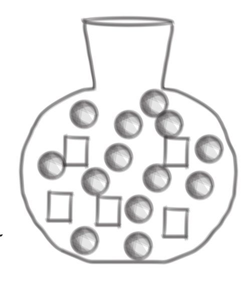


Fig. 12. Bombonera. Adaptado de Smith y colegas (2005).

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Papel del docente	Se sitúa al frente del salón y domina la conversación	Fomenta que se compartan las ideas matemáticas e instruye al que habla a que se dirija a toda la clase y no sólo al maestro.	Facilita la conversación entre estudiantes y los anima a que se hagan preguntas entre ellos.	Los estudiantes se hacen cargo de la conversación entre ellos. El docente sólo la guía desde afuera. El docente aguarda a que los estudiantes clarifiquen el pensamiento de sus compañeros.
Planteamiento de preguntas	El docente es el único que pregunta. Las preguntas sirven para que los alumnos escuchen al profesor. Los estudiantes dan respuestas breves y sólo responden al maestro.	Las preguntas del docente empiezan centrándose en el pensamiento del estudiante y en menor medida en sus respuestas. Sólo el docente plantea preguntas.	El docente plantea preguntas exploratorias y promueve que haya cierto diálogo entre estudiantes. Ellos se plantean preguntas entre sí con el asentimiento del profesor.	El diálogo entre estudiantes lo inician ellos mismos. Plantean preguntas y escuchan las respuestas. Muchas preguntas son del tipo "¿por qué"?, y exigen una justificación. Las preguntas del docente tal vez guíen el discurso.
Explicación del pensamiento matemático	Las preguntas del docente se centran en la exactitud. Los estudiantes dan respuestas breves y limitadas. Tal vez el docente proporcione las respuestas.	El docente explora un poco el pensamiento del educando. Quizá se deduzcan una o dos estrategias. Tal vez el profesor proporcione una explicación. Los estudiantes dan descripciones breves de su razonamiento como respuesta a las exploraciones del docente.	El docente lleva a cabo una exploración más acuciosa a fin de conocer el razonamiento del estudiante. El profesor extrae varias estrategias. Los alumnos responden a la exploración del maestro y ofrecen voluntariamente sus razonamientos. Los alumnos comienzan a justificar sus respuestas.	El docente hace un seguimiento meticuloso de las explicaciones de los estudiantes. Les pide que comparen estrategias. Los alumnos defienden y justifican sus respuestas sin que necesiten mucho incentivo por parte del profesor.
Representaciones matemáticas	Faltan representaciones o el docente las muestra a los estudiantes.	Los alumnos aprenden a crear diagramas matemáticos para ilustrar su razonamiento matemático.	Los estudiantes etiquetan sus diagramas matemáticos a fin de que otros puedan seguir su razonamiento matemático.	Los alumnos siguen y ayudan a dar forma a las descripciones del razonamiento matemático de otros a través de diagramas matemáticos y tal vez sugieran cambios en los diagramas matemáticos de los otros.
Creación de la responsabilidad del estudiante al interior de la comunidad	La cultura fomenta que los estudiantes se guarden sus ideas para ellos o sólo respondan cuando se les pregunta.	Los alumnos consideran que sus ideas son aceptadas por la comunidad de sus compañeros. Comienzan a escucharse entre sí para apoyarse y replantean con sus propias palabras lo que otros alumnos expresaron.	Los estudiantes se consideran aprendices de matemáticas y que son importantes tanto sus ideas como las de sus compañeros. Escuchan atentamente, de manera que pueden hacer contribuciones significativas.	Los alumnos consideran que son líderes en matemáticas y que pueden auxiliar a configurar el pensamiento de otros. Ayudan a dar forma al pensamiento matemático de terceros de una manera que los apoye y a un nivel escolar; también aceptan el mismo tipo de apoyo por parte de otros.

Fig. 11. Niveles de discurso en la clase. Tomado de Hufford-Ackles, Fuson y Sherin (2014), tabla 1.

El profesor Domínguez supervisa a sus alumnos mientras trabajan en pequeños grupos sobre la tarea de la bombonera, dando apoyo cuando lo necesitan y atendiendo a las estrategias de ellos. Observa que los alumnos que utilizan la estrategia de incrementar valores lo hacen de diversas formas. Algunos emplean una tabla que muestra un incremento constante de 5 caramelos y 13 chocolates (véase la solución 1 a continuación), otros usan una tabla de proporción que contiene diferentes múltiplos de 5 y 13 y otros más incluso elaboran dibujos de bomboneras. El docente decide que los grupos que optaron por las soluciones 1, 2 y 3 (mostradas abajo) presenten su trabajo en ese orden, ya que se valieron de estrategias que él tiene presentes (es decir, incrementar valores, usar un factor de escala y utilizar la razón unitaria). Esta sucesión refleja la complejidad y la frecuencia de las estrategias (verbigracia, la mayoría de los grupos empleó la estrategia de incrementar valores y sólo un grupo usó la estrategia de la razón unitaria).

Solución 1. Razonamiento tipo "incremento de valores".

Explicación del estudiante: "Comencé con 5 caramelos y 13 chocolates y después sólo fui agregando 5 caramelos y 13 chocolates cada vez, hasta llegar a 100 caramelos. Luego me di cuenta que obtuve 260 chocolates".

CA	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
CH	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260

Solución 2. Razonamiento tipo "factor de escala".

Explicación del estudiante: "Tienes que multiplicar los 5 caramelos por 20 para que tengas 100, así que también tendrías que multiplicar los 13 chocolates por 20, con lo cual se obtienen 260".

$$(\times 20)$$
$$5\ \text{CA} \rightarrow 100\ \text{CA}$$
$$13\ \text{CH} \rightarrow 260\ \text{CH}$$
$$(\times 20)$$

Solución 3. Razonamiento tipo "razón unitaria".

Explicación del estudiante: "Ya que la razón es 5 caramelos por 13 chocolates, se tiene que por cada caramelo hay 2 chocolates. De esta forma ya distribuiste 10 chocolates, pero sigues teniendo 3 que se deben repartir. Así que éstos los distribuyes entre 5 caramelos, lo que daría: $3 \div 5 = 0.6$ chocolates, y al juntar todo se tiene una razón de 1 caramelo por 2.6 chocolates. Entonces sólo tienes que multiplicar 100 por 2.6".

$$(\times 100)$$
$$1\ \text{CA} \rightarrow 100\ \text{CA}$$
$$2.6\ \text{CH} \rightarrow 260\ \text{CH}$$
$$(\times 100)$$

Durante el análisis, el profesor Domínguez pide a los presentadores que expliquen lo que hicieron y el por qué; también conmina a otros estudiantes a que consideren si el enfoque tiene sentido y que hagan preguntas. Hace hincapié en darle nombre a cada una de las tres estrategias, para preguntar a los alumnos cuál es la más eficiente para resolver esta tarea en particular; después plantea preguntas que los ayuden a hacer conexiones entre las estrategias y las ideas centrales que se están estudiando.

De manera específica, quiere que los educandos se percaten que el factor de escala es igual al número de columnas de la tabla empleada para incrementar valores. En otras palabras se requieren 20 bomboneras con la misma cantidad de caramelos y de chocolates que la bombonera original, para obtener la nueva bombonera. Después el maestro Domínguez hará que comparen este resultado con el obtenido con la razón unitaria, que representa el factor que relaciona al número de caramelos con el de chocolates en cada columna de la tabla de la solución 1 (es decir: $5 \times 2.6 = 13$, tal y como $55 \times 2.6 = 143$ y que es igual a $100 \times 2.6 = 260$).

Al final de la lección, el docente registra en el proyector de documentos de la clase como la solución 4 aquella que se muestra abajo, y pide a sus alumnos que decidan si es o no es un enfoque factible para resolver la tarea, también les pide que justifiquen sus respuestas.

Solución 4. Razonamiento incorrecto tipo "sumatorio".

Explicación del estudiante: "Cien caramelos son 95 caramelos más que los 5 con los que empecé. Así que necesito sumar 95 chocolates a los 13 que tenía al principio".

$$5 \text{ CA} + 95 \text{ CA} = 100 \text{ CA}$$

$$13 \text{ CH} + 95 \text{ CH} = 108 \text{ CH}$$

El profesor Domínguez les da 5 minutos a los estudiantes para que escriban la respuesta, después se las pide conforme salen del salón para ir a su próxima clase. Espera que las respuestas le indiquen si sus alumnos están empezando a comprender que para que las razones se mantengan constantes, los numeradores y denominadores deben incrementarse de acuerdo con una razón que es multiplicativa y no aditiva.

Fig. 13. La implementación de la tarea de la bombonera por parte del profesor Domínguez. Soluciones adaptadas de Smith y colegas (2005).

El maestro Domínguez da un seguimiento acucioso de lo que sus estudiantes están haciendo cuando exploran la tarea (*supervisión*), de manera que se ubica en una posición que le permite hacer elecciones estratégicas concernientes con las soluciones en las que hará hincapié durante la puesta en común (*selección*) y en qué orden lo hará (*secuenciación*). Elige a tres equipos para que presenten su trabajo; cada uno utilizó una de las estrategias que él señaló como su meta de la lección. Llevar a cabo elecciones deliberadas sobre lo que habrá de centrarse la puesta en común, le permite emplear el tiempo de esta puesta en común para comprometer a los estudiantes a que lleven a cabo de una manera productiva una profunda reflexión sobre unos pocos enfoques y sobre las conexiones habidas entre ellos (*conexión*). Su decisión en cuanto a terminar la clase pidiendo a los estudiantes que escriban una crítica individual a una respuesta que utiliza erróneamente el razonamiento aditivo, le brinda una forma de evaluar el grado en que los estudiantes comprenden que la relación entre los tipos de golosinas es multiplicativa y no aditiva.

El maestro Domínguez facilita el análisis, en vez de dirigirlo. Al basarse en el trabajo elaborado por los estudiantes, los ubica como "autores" de matemáticas y los involucra en un discurso provechoso sobre un conjunto importante de ideas relacionadas con las razones y las relaciones proporcionales. Aunque plantea preguntas y proporciona información (por ejemplo, al darles títulos a las estrategias) para asegurar que se cumplen las metas de aprendizaje matemático, lo hace de una forma que brinda a los alumnos la apropiación de su aprendizaje. El maestro Domínguez incuestionablemente está a cargo de la clase, pero ofrece una orientación en gran medida guiada, aunque no interfiere con la cada vez mayor autoridad matemática de los estudiantes.

Acciones del docente y del estudiante

El discurso matemático llevado a cabo entre los estudiantes resulta esencial para un aprendizaje significativo de las matemáticas. Los docentes preparan y facilitan el discurso meticulosa y deliberadamente, de tal modo que la puesta en común construye el razonamiento del estudiante y guía el aprendizaje del grupo en una dirección productiva y disciplinada. Los estudiantes devienen miembros activos del discurso comunitario conforme explican su razonamiento y toman en cuenta tanto las explicaciones como las estrategias matemáticas de sus compañeros. Las acciones listadas en la siguiente tabla ofrecen cierta guía sobre lo que docentes y estudiantes llevan a cabo conforme se comprometen con un discurso significativo en el salón de clases.

Facilitar un discurso matemático significativo **Acciones de los docentes y estudiantes**	
¿Qué están haciendo los *docentes*?	**¿Qué están haciendo los *estudiantes*?**
Comprometer a los alumnos a que compartan deliberadamente ideas, enfoques y razonamiento matemáticos, utilizando diversas representaciones.	Presentar y explicar las ideas, razonamientos y representaciones en parejas, en pequeños equipos o en la puesta en común para todo el grupo.
Seleccionar y dar una secuencia a los enfoques y a las estrategias de solución de los estudiantes, para que en la puesta en común se analicen y se discutan.	Escuchar con atención y criticar el razonamiento de sus compañeros, respaldando los argumentos con ejemplos o refutándolos con contraejemplos.
Facilitar el discurso entre los estudiantes al ubicarlos como autores de ideas, que explicarán y defenderán sus enfoques.	Tratar de entender el enfoque empleado por sus compañeros, plantear preguntas que clarifiquen, someter a prueba las estrategias de los otros y describir los enfoques que éstos utilizaron.
Asegurar el avance hacia las metas matemáticas haciendo conexiones explícitas entre los enfoques y el razonamiento de los estudiantes.	Identificar cómo los distintos enfoques que resuelven una tarea son semejantes y cómo son diferentes.

Planteamiento de preguntas deliberadas

Una enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza preguntas deliberadas para evaluar y mejorar el razonamiento del estudiante y para que le dé sentido a ideas y relaciones matemáticas importantes.

La enseñanza eficaz de las matemáticas se apoya en plantear preguntas que estimulen a los estudiantes a explicar y reflexionar sobre su propio pensamiento, lo cual representa un componente esencial del discurso matemático significativo. Las preguntas deliberadas permiten a los docentes discernir lo que los estudiantes saben a fin de adaptar las lecciones para alcanzar diversos niveles de comprensión; asimismo, ayudan a los estudiantes a efectuar conexiones matemáticas importantes y los apoyan para que planteen sus propias preguntas. No obstante, el sólo hecho de plantear preguntas no resulta suficiente para garantizar que los alumnos le den sentido a las matemáticas y para que hagan progresos en su razonamiento. Deben tomarse en cuenta dos aspectos fundamentales: los tipos de preguntas que los maestros plantean y el modelo de cuestionamiento que usen.

Análisis

Los investigadores han elaborado una diversidad de marcos teóricos para categorizar los tipos de preguntas que los docentes plantean (por ejemplo: Boaler y Brodie 2004; Chapin y O'Connor 2007). A pesar de que las categorías son distintas en cada marco teórico, existen rasgos comunes a los tipos de preguntas. Por ejemplo, todo marco teórico suele incluir preguntas que exigen a los estudiantes recordar información, así como aquellas que exigen a los alumnos explicar su razonamiento. La figura 14 muestra un conjunto de tipos de preguntas que sintetizan los aspectos clave de dichos marcos teóricos y que resultan particularmente importantes para la enseñanza de las matemáticas. Aunque los tipos de preguntas se diferencian respecto del nivel de pensamiento que exigen de la respuesta, todas las clases de preguntas se requieren en las interacciones entre estudiantes y docentes. Por ejemplo, las preguntas que recopilan información son necesarias para establecer lo que los alumnos saben, en tanto que aquellas que alientan a la reflexión y la justificación resultan esenciales para revelar su razonamiento.

Tipo de pregunta		Descripción	Ejemplos
1	Recopila información	Los estudiantes recuerdan hechos, definiciones o procedimientos	Cuando escribes una ecuación, ¿qué significa para ti el signo igual? ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un rectángulo? ¿Qué muestra el rango intercuartil en un conjunto de datos?

Tipo de pregunta		Descripción	Ejemplos
2	Explora el razonamiento	Los alumnos explican, elaboran o clarifican su razonamiento, lo cual incluye articular los pasos de los métodos de solución o completar una tarea.	Mientras trazabas esa recta numérica, ¿qué decisiones tomaste para que pudieras representar 7/4 en ella? ¿Puedes mostrar y explicar un poco más cómo utilizaste una tabla para obtener la respuesta a la tarea de las tarifas de teléfonos celulares? Todavía no es clara la forma en que supiste que 20 era el factor de escala así que, ¿podrías explicarlo de otra forma?
3	Hace evidente las matemáticas	Los alumnos analizan estructuras matemáticas y establecen conexiones entre las ideas y las relaciones matemáticas.	¿Cómo se relaciona tu ecuación con el problema del concierto de la banda? ¿Cómo se relaciona ese arreglo con la multiplicación y la división? ¿De qué maneras pudiera aplicarse la distribución normal a esta situación?
4	Alienta la reflexión y la justificación	Los estudiantes muestran un conocimiento más profundo de sus relaciones y acciones, lo cual incluye construir un argumento para validar su trabajo.	¿Cómo demostrarías que 51 es la solución? ¿Cómo sabes que la suma de dos números impares siempre será par? ¿Por qué el plan A en la tarea de las tarifas telefónicas empieza siendo más barato pero a la larga resulta ser más caro?

Fig. 14 Un marco teórico para los tipos de preguntas utilizadas en la enseñanza de las matemáticas.

Si bien los *tipos* de preguntas que los docentes plantean son relevantes, de igual forma lo son los *modelos* de cuestionamiento que utilizan durante las interacciones entre el docente y el estudiante (Walsh y Sattes 2005). En el modelo Inicio-Respuesta-Evaluación (I-R-E), el docente comienza planteando una pregunta para obtener información, por lo general teniendo en mente una respuesta específica; después un estudiante responde y luego el docente evalúa la respuesta (Mehan 1979). No es poco frecuente que los docentes den menos de 5 segundos para que responda un educando y además el profesor da menos tiempo incluso para que aquél reflexione su respuesta. Por lo general, este modelo de cuestionamiento ofrece muy escasas oportunidades a los estudiantes para que piensen y a los docentes les impide saber si los alumnos están dando sentido a las matemáticas y la forma en que hacen esto. Otros modelos de cuestionamiento van más allá del tipo de preguntas que requieren recordar información. Dos de éstos son el de *embudo* y el de *enfoque* (Herbel-Eisenmann y Breyfogle 2005; Wood 1998).

El modelo de cuestionamiento tipo embudo implica emplear un conjunto de preguntas a fin de llevar a los estudiantes hacia el procedimiento o conclusión deseados, además no presta mucha atención a las respuestas de aquellos que se desvían de la ruta deseada. El docente decidió una senda específica sobre la que debe conducirse el análisis y guía a los alumnos a lo largo de ese camino, sin permitirles hacer sus propias conexiones o construir su propia comprensión de los conceptos matemáticos señalados. El modelo I-R-E es muy semejante al de embudo, a pesar de que en este último puedan tener cabida preguntas de alto nivel.

Por el contrario, un modelo de cuestionamiento tipo enfoque implica que el docente ponga atención en lo que los estudiantes están pensando, los obligue a que comuniquen con claridad sus pensamientos y espera que ellos reflexionen en torno a sus pensamientos y a los de sus compañeros de clase. El docente que emplea este modelo está abierto a que una tarea se aborde de múltiples maneras. Con base en el conocimiento contenido relacionado con el tema y el conocimiento del aprendizaje del estudiante, el profesor planifica las preguntas y bosqueja los puntos clave que devendrán conspicuos en la clase.

Ejemplo

La figura 15 muestra dos implementaciones hechas en sus clases por maestros de nivel medio superior de una tarea sobre la circulación de una moneda. Escogen la tarea porque ofrece a los estudiantes la oportunidad de resumir, representar e interpretar datos y de tener una mejor comprensión y evaluación de los procesos aleatorios que subyacen en las investigaciones estadísticas. En particular, los estudiantes representan datos mediante puntos sobre una recta numérica de reales e interpretan las diferencias habidas en su forma, su centro y su dispersión, dentro de un contexto de conjuntos de datos.

Los estudiantes de dos clases de nivel medio superior están investigando cuánto cuesta acuñar monedas. Como parte de su investigación decidieron que sería útil determinar el número aproximado de años que una moneda circula. En vez de estudiar todos los tipos distintos de monedas, eligieron recopilar datos respecto de la duración de las monedas de centavo. Esto condujo a que investigaran el tiempo que estas monedas están en circulación.

Las metas de aprendizaje matemático de los docentes para esta tarea consisten en que los alumnos recopilen datos, los analicen y lleguen a una conclusión, así como que identifiquen las limitantes de esta investigación referente a su método de muestreo. De manera específica, los profesores quieren que sus alumnos reconozcan que los resultados no se generalizan para poblaciones mayores.

Ambos profesores le piden a cada estudiante que traiga monedas al salón. El propósito de ambas clases es que les toque un rollo de monedas a cada dos o tres alumnos. Equipos pequeños arreglan las monedas de acuerdo con su año de acuñación y determinan su antigüedad. Los datos recopilados por todo el salón se registran en una tabla dibujada en el pizarrón. Luego en grupos reducidos se hacen gráficas de punto y de caja-brazos, similares a las mostradas más adelante, tomando como base la antigüedad de las monedas.

Número de monedas

Duración (años)

Duración de las monedas (años)

Fig. 15 Tarea sobre la circulación de monedas.

Aunque la tarea fuerza a los estudiantes de ambos grupos a razonar y resolver problemas, los docentes usan diferentes modelos de cuestionamiento. Los fragmentos de la puesta en común mostrados en la figura 16 ilustran los modelos de cuestionamiento de ambos maestros.

Modelo de cuestionamiento tipo "embudo"	**Modelo de cuestionamiento tipo "enfoque"**
M: ¿Qué observas en la gráfica? (espera brevemente) ¿Notas un patrón en los datos? (de nuevo espera brevemente) ¿Cuáles son las medidas de tendencia central de la gráfica para las monedas?	*M*: ¿Qué cosas observas o sospechas respecto de la duración de las monedas?
E_1: La media es de casi 12.9 años y la mediana es de casi 9 años.	E_1: Al parecer muchas de ellas no duran demasiado.

M: ¿Qué indica la gráfica de caja-brazos respecto a la variabilidad de los datos?	M: ¿Qué elementos de la gráfica te hacen decir eso?
E_2: Tiene un brazo largo en un lado.	E_1: Hay un montón de monedas nuevas.
M: Tal vez sea cierto, ¿pero qué pasa con el rango intercuartil (RIC)? ¿Qué nos dice?	M: ¿Hay algo más que notes?
E_3: El lugar donde se ubica la mayoría de las monedas.	E_2: Determiné el rango intercuartil y vi que la mayoría de las monedas tiene una duración de entre 3 a 19 años.
M: ¿Eso es en verdad lo que nos señala el RIC? ¿Qué es lo que representa cada parte de la gráfica caja-brazos?	M: Explícanos qué nos indica el rango intercuartil.
E_4: Cada una es un 25%.	E_2: Es en donde se ubica la mayoría de las monedas.
M: Sí, pero ¿qué más?	M: ¿Qué quieres decir con "la mayoría de las monedas"?
E_5: La mitad es el 50% de las monedas y se ubica entre los 3 y los 19 años de duración.	E_2: Bueno, quiero decir el 50%. Creo que la gráfica muestra con dificultad en qué lugar se ubican verdaderamente las cosas. No parece una gráfica normal, así que no podría usar el criterio del área de en medio donde se ubica el 68%, del que ya habíamos hablado.
M: Bien. ¿Qué más se puede decir de las monedas con base en esta información?	M: No estoy seguro si entendí. ¿Puede alguien más aclarar lo que está diciendo su compañera?
E_6: Que la mayoría tiene una duración de casi 10 años.	E_3: Quiere decir que debido a que hay un brazo, la gráfica no es como las curvas normales que hemos estudiado. Si lo fuera, podríamos dar una aproximación del lugar en donde se ubican la mayoría de los tiempos de duración más parecidos; diríamos que el 68% de los datos se ubicaría dentro de una desviación estándar de la media.
M: Pero ya que son monedas de centavo, ¿qué más nos dicen respecto de todas las monedas?	(Enseguida se da un mayor análisis y los estudiantes determinan que el 75% de las monedas no tienen una duración de más de 19 años).
E_7: Que las monedas durarán cerca de 10 años.	M: ¿Sería correcto que dijera que un centavo quizá no duraría más de 19 años?
M: Bien, los centavos duran 10 años, pero esto no será necesariamente cierto para, digamos, las monedas de 25 centavos, ¿por qué no?	E_4: Sí, porque esas monedas eran una muestra aleatoria, lo cual significa que podemos generalizar.
	E_5: Pero estudiamos los centavos, así que no podemos generalizar para los 25 centavos. La gente utiliza más los centavos.
	M: ¿Qué quieres decir con eso?
	E_5: Los centavos quizá estén desgastados. A partir de nuestra muestra, no sabemos nada sobre otras monedas, pues las pesetas son una población distinta.

Fig. 16. Una comparación en dos grupos de los modelos de cuestionamiento para la tarea de circulación de monedas (M significa maestro, E1 estudiante 1, etcétera).

En el ejemplo del modelo de embudo, el docente quiere que sus estudiantes observen las medidas de tendencia central y la dispersión de los datos. El diálogo deja ver una dependencia en las preguntas de recopilación de información. Se necesita determinada recopilación de la información para que el maestro conozca el fundamento del razonamiento de los estudiantes. Pero las preguntas que exploran la comprensión, necesitan formar parte de un modelo de cuestionamiento que haga progresar el razonamiento de los estudiantes.

Conforme este diálogo tipo embudo se desarrolla, el docente fuerza a sus estudiantes a que observen la parte central y la dispersión de los datos para que lleguen a una conclusión, y por último les plantea una pregunta de alto nivel: ¿qué pueden decir de las monedas con base en esta información? Ya que no se les ha dado a los estudiantes la oportunidad de reflexionar con la suficiente profundidad sobre lo que los datos muestran en cuanto a la circulación de las monedas, sólo pueden dar respuestas superficiales a esta pregunta. Este ejemplo ilustra un modelo de cuestionamiento demasiado común, en el que el docente utiliza al principio una pregunta exploratoria, pero da poco tiempo para la respuesta, y de inmediato sigue planteando preguntas más enfocadas hacia una respuesta particular.

Por el contrario, el ejemplo del modelo de enfoque ilustra el modo en que el docente mezcla a propósito los cuatro tipos de preguntas. Algunas se pensaron con anticipación a la clase, y del mismo modo se consideraron las posibles respuestas de los estudiantes. Otras preguntas se formularon en el momento, como respuesta a las afirmaciones y acciones de los estudiantes durante la clase. A lo largo del diálogo, el docente se esfuerza para incluir preguntas que obliguen a los estudiantes a clarificar sus ideas y a que hagan explícitas las matemáticas, con el objeto de profundizar su comprensión matemática en función de las metas de aprendizaje pretendidas.

Acciones de los docentes y estudiantes

En la enseñanza eficaz, los docentes echan mano de diversos tipos de preguntas a fin de evaluar y colectar evidencia del pensamiento del estudiante, lo cual incluye preguntas que recopilen información, exploren la comprensión, hagan que las matemáticas sean explícitas y les pidan a los estudiantes que reflexionen y justifiquen su razonamiento. Después los maestros emplean modelos de cuestionamiento que centran y amplían las ideas actuales de los estudiantes con el objeto de que su conocimiento progrese y den mayor sentido a las ideas y relaciones matemáticas importantes. Las acciones de los docentes y de los estudiantes que se listan en la siguiente tabla proporcionan un resumen del empleo de preguntas deliberadas dentro de la clase de matemáticas.

Planteamiento de preguntas deliberadas Acciones de los docentes y estudiantes	
¿Qué es lo que los *docentes* están haciendo?	**¿Qué es lo que los *estudiantes* están haciendo?**
Elevan la comprensión del estudiante al plantear preguntas que construyen el pensamiento del estudiante, pero sin apropiárselo o encausarlo. Plantean ciertas preguntas que van más allá de la recopilación de la información, que exploran el pensamiento y exigen explicación y justificación. Hacen preguntas deliberadas que posibilitan a las matemáticas ser más explícitas y accesibles para el examen y análisis por parte de los estudiantes. Dan el tiempo suficiente de modo que más estudiantes puedan formular y brindar respuestas.	Esperan que se les pida explicar, clarificar y elaborar su propio razonamiento. Piensan cuidadosamente el modo de presentar sus respuestas a las preguntas de manera clara y sin preocuparse por responder impulsivamente. Reflexionan y justifican su razonamiento, no se contentan con dar respuestas. Escuchan, comentan y cuestionan las contribuciones de sus compañeros de clase.

Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual

Una enseñanza de las matemáticas efectiva logra la fluidez en los procedimientos basándose en la comprensión conceptual, de manera que los estudiantes, con el tiempo, se vuelvan hábiles en el empleo flexible de procedimientos, a medida que resuelven problemas contextuales y matemáticos.

La enseñanza eficaz de las matemáticas se centra en el desarrollo *tanto* de la comprensión matemática *como* de la fluidez procedimental. Importantes informes han identificado la trascendencia de un desarrollo integrado y equilibrado de los conceptos y procedimientos en el aprendizaje de las matemáticas (*National Mathematics Advisory Panel* 2008; *National Research Council* 2001). Es más, el *NCTM* (1989, 2000) y la *CCSSM* (*NGA Center* y *CCSSO* 2010) subrayan que la fluidez procedimental se sigue y se erige sobre los fundamentos de la comprensión conceptual, el razonamiento estratégico y la resolución de problemas.

Análisis

Cuando los procedimientos se relacionan con los conceptos subyacentes, los estudiantes logran una mejor retención de los procedimientos y tiene una mayor capacidad para aplicarlos en nuevas situaciones (Fuson, Kalchman y Bransford 2005). Martin (2009, p. 165) expone algunas de las razones por las que la fluidez depende y se amplía a partir de la comprensión conceptual:

Para utilizar las matemáticas de manera eficaz, los estudiantes deben ser capaces de hacer mucho más que llevar a cabo procedimientos matemáticos. Han de saber cuál procedimiento es el adecuado y más productivo para una situación dada, lo que un procedimiento realiza y el tipo de resultados que se espera. La ejecución mecánica de los procedimientos, sin entender sus bases matemáticas, a menudo conduce a resultados extraños.

La fluidez no es una idea simple. Tener fluidez significa que los estudiantes pueden elegir con flexibilidad métodos y estrategias para resolver problemas matemáticos y contextuales, que entienden y son capaces de explicar sus enfoques y que pueden ofrecer respuestas exactas de un modo eficiente. La fluidez se erige desde una exploración inicial y un análisis de conceptos numéricos que se utilizan en estrategias de razonamiento informales, las cuales se basan en los significados y propiedades de las operaciones y que a la larga se emplean en métodos generales como herramientas para la resolución de problemas. Esta secuencia resulta benéfica para los estudiantes, ya sea que estén desarrollando una fluidez en cálculos con uno o varios números enteros, o la estén desarrollando, por ejemplo, en operaciones con fracciones, relaciones de proporcionalidad, fórmulas para medición o procedimientos algebraicos.

La fluidez en el cálculo numérico se relaciona estrechamente con el sentido numérico e implica mucho más que lo que la concepción convencional de dicho cálculo abarca. El desarrollo en los estudiantes de la fluidez en el cálculo numérico va más allá de hacer que ellos memoricen hechos o una serie de pasos que no se vinculan con la comprensión

(Baroody 2006; Griffin 2005). Asimismo, la premura por adquirir una fluidez socaba la confianza y el interés de los estudiantes por las matemáticas y además se considera como una causa que provoca la ansiedad matemática (Ashcraft 2002; Ramírez *et al*. 2013). Es más, el trabajo prematuro con las estrategias de razonamiento se vincula con el razonamiento algebraico. Conforme los alumnos aprenden la forma en que las cantidades pueden desunirse y luego agruparse de nuevo de diferentes maneras (es decir, la composición y descomposición de números), sientan una base para comprender las propiedades de las operaciones. A lo largo de su educación primaria, media y media superior, los estudiantes necesitan este fundamento prematuro a fin de adquirir un aprendizaje significativo de conceptos y procedimientos algebraicos más formales (Carpenter, Franke y Levi 2003; Griffin 2003; equipo de redacción de los Estándares Estatales de Base Común 2011).

En el aprendizaje significativo de las combinaciones numéricas básicas (es decir, la adición y sustracción no mayor a 20, así como la multiplicación y división no mayor a 100), los estudiantes experimentan un progreso de su fluidez a través de fases bien documentadas (Baroody 2006; Baroody, Bajwa y Eiland 2009; Carpenter *et al*. 1999). Comienzan manipulando objetos, usando representaciones visuales y conteo verbal, para después avanzar hacia estrategias de razonamiento mediante el empleo de relaciones y propiedades numéricas. Por ejemplo, para resolver 8 + 4, al principio del año escolar un alumno de primer grado podría contar a partir de 8, si bien al paso de un tiempo el mismo estudiante podría razonar así: ya que 8 + 2 es igual a 10, entonces 8 + 4 debe ser igual a 2 unidades más que 10, o sea 12. Un alumno de tercer año podría utilizar inicialmente la adición iterativa para resolver 4 × 6 y luego progresar en su razonamiento observando que 2 seises son 12, de modo que 4 seises debe ser el doble de aquella cantidad, o sea 24. Con el tiempo, este enfoque ayuda a los estudiantes a conocer, comprender y ser capaces de utilizar de manera significativa su conocimiento sobre la combinación de números en nuevas situaciones.

Los procedimientos de aprendizaje para cálculos numéricos con varios dígitos necesitan construirse a partir de una comprensión de sus bases matemáticas (Fuson y Beckmann 2012/2013; Russell 2000). Por ejemplo, considérese el trabajo hecho por los alumnos de cuarto año David y Ana, mostrado en la figura 17, sobre un problema multiplicativo: 57 × 4 = ☐ así como sus explicaciones sobre la forma en que lo hicieron.

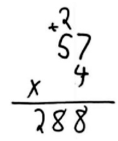
Solución de David	Solución de Ana
	4 x 57 4 x 50 = 200 4 x 7 = 28 200 + 28 = 228
Multipliqué 7 por 4 para tener 28. Bajé el 8 y el 2 lo subí para sumarlo al 5 y obtuve 7; después a éste lo multipliqué por 4 y fue igual a 28. Bajé el 28 y me resultó 288.	Lo hice por partes. Primero multipliqué 4 × 50 para tener 200. Luego multipliqué 4 × 7 y me resultó 28. Después sólo sumé esas dos partes para tener la respuesta.

Fig. 17 Las soluciones de Ana y David para el problema multiplicativo. Adaptado de Russell (2000).

La fallida aplicación de David del algoritmo de la multiplicación provocó una respuesta errónea, y que él debía haberse percatado que su resultado era muy grande (es decir, una respuesta razonable debería haber sido menos que 4 × 60). La solución de Ana, por el contrario, muestra que comprende que 57 puede descomponerse en decenas y unidades, que cada cantidad se puede multiplicar por 4 (una aplicación de la propiedad distributiva) y que esas nuevas cantidades pueden combinarse.

De igual forma, un estudiante de educación media superior que no entiende la fórmula de la distancia quizá te*nga* problemas para recordarla con precisión y aplicarla en forma adecuada en problemas contextualizados:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Por el contrario, aquél que comprenda que la fórmula es una aplicación del teorema de Pitágoras (a saber: la distancia entre dos puntos puede concebirse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo), puede echar mano de su comprensión de esta relación subyacente para resolver apropiadamente un problema que te*nga* que ver con la distancia entre dos puntos (Martin 2009).

Resulta evidente que los estudiantes requieren procedimientos que entiendan y que puedan usar en una amplia gama de tipos de problemas. Esto hace surgir cuestionamientos respecto de *cómo* pueden avanzar de manera más eficaz para lograr una fluidez con los métodos o algoritmos generales y respecto de lo que define a un algoritmo. Fuson y Beckmann (2012/2013) argumentan que un algoritmo estándar se define mediante su enfoque matemático y no por la forma en que los pasos se indican en el enfoque. Sugieren que las variaciones en la notación no sólo son aceptables sino que verdaderamente resultan valiosos para reforzar la comprensión de los estudiantes del sistema decimal y de las propiedades de las operaciones. También subrayan la importancia de la comprensión, la explicación y la visualización: “los algoritmos estándar deben comprenderse y explicarse, así como relacionarse con modelos visuales, antes de que se te*nga* un enfoque en la fluidez” (p. 28).

Por ejemplo, el algoritmo convencional para la multiplicación con cifras de varios dígitos resulta complicado de entender, tal y como la figura 18 lo ilustra, si bien los tres métodos alternativos que se muestran son más transparentes en lo que concierne con las características matemáticas fundamentales de los significados del valor posicional y de las propiedades de las operaciones (Fuson 2003). Los diagramas ilustran la multiplicación de decenas y de unidades, así como el tamaño relativo (del área) de los productos parciales. El algoritmo que resulta accesible muestra un registro claro de los cuatro pares de números que se están multiplicando. Esta progresión también auxilia a los estudiantes para que establezcan una base, a partir de la cual apliquen y amplíen esta comprensión a operaciones con números racionales y expresiones algebraicas.

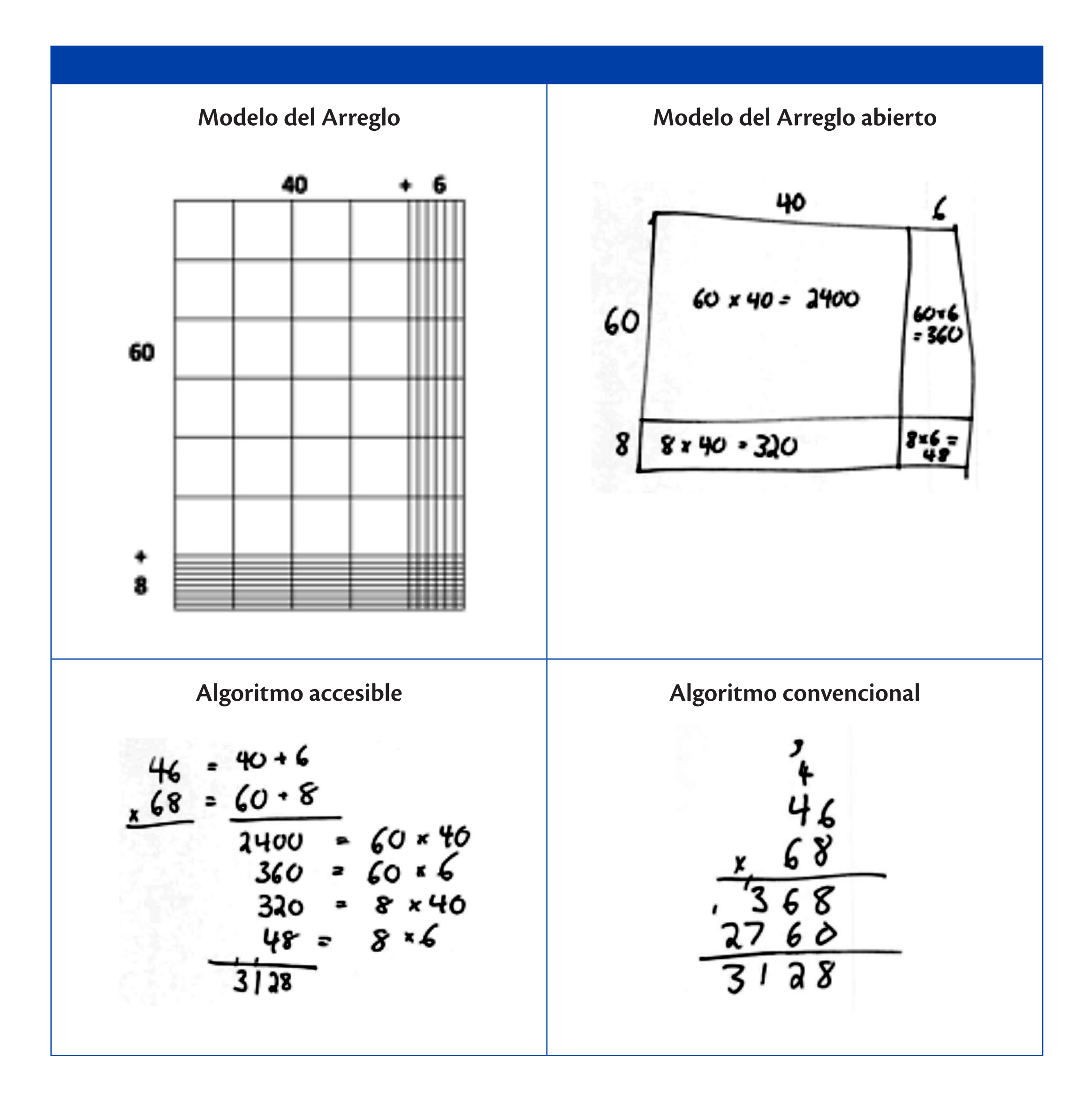


Fig. 18. Métodos para la multiplicación de números con varios dígitos, utilizando 68 × 46. Adaptado de Fuson (2003, p. 303)

Al ir en pos de la fluidez, los estudiantes también necesitan tener oportunidades para ensayar o practicar estrategias y procedimientos, con el objeto de consolidar su saber. Sin embargo, un enfoque erróneo para que adquieran fluidez es proporcionarles demasiado pronto muchos problemas de práctica. Una vez que hayan establecido un cimiento conceptual firme y tengan la capacidad de explicar las bases matemáticas de una estrategia o procedimiento, requieren tener oportunidades para practicar un número moderado y cuidadosamente seleccionado de problemas. En ese momento, se estarán respaldando los resultados del aprendizaje si se proporciona a los estudiantes unos cuantos problemas para que practiquen, distribuyéndolos o "espaciándolos" a lo largo de un periodo, y si se incluye una retroalimentación del desempeño de ellos, (Pashler *et al*. 2007; Rohrer 2009; Rohrer y Taylor 2007).

De manera similar, la práctica con combinaciones numéricas básicas habrá de dárseles después de que puedan explicar y justificar su uso de estrategias de razonamiento eficaces. Se debe hacer una advertencia sobre las pruebas cronometradas. El empleo prematuro y excesivo de dichas pruebas quizá po*NGA* trabas al dominio de los alumnos y disminuya su autoconfianza como aprendices de matemáticas (Boaler 2012; Seeley 2009). La práctica con combinaciones numéricas básicas debe enfocarse a reafirmar el empleo por parte de los estudiantes de una estrategia eficiente para combinaciones numéricas específicas (Rathmell 2005; Thornton 1978). Isaacs y Carroll (1999) sugieren que la práctica sea breve, atractiva, deliberada y esté distribuida. Por ejemplo, la práctica puede centrarse en estrategias específicas, como completar una decena mediante la adición u obtener el doble de un hecho conocido de multiplicación, y estar inmersa en tareas de resolución de problemas y en juegos (Crespo, Kyriakides y McGee 2005).

Ejemplo

La utilización del profesor Domínguez de la lección sobre la bombonera, mostrada en la figura 13, constituye para sus alumnos un paso importante en la obtención de fluidez para la resolución de problemas que implican relaciones de proporción. El maestro Domínguez los ayuda a comprender que las razones necesitan ser constantes y que pueden utilizar diversos enfoques para conservar constante esta relación multiplicativa que hay entre el numerador y el denominador. Más adelante, el profesor Domínguez tendrá necesidad de analizar la eficiencia de algunas estrategias en comparación con otras (verbigracia, el uso del factor de escala suele ser más eficiente que el incremento de valores mediante la construcción de una tabla) y necesitará proporcionar ejemplos de problemas en los que las estrategias específicas resulten particularmente útiles para su resolución. Por último, el maestro Domínguez querrá dar a sus estudiantes problemas en los que ni la tasa unitaria ni el factor de escala sean números enteros (por ejemplo $5/13 = 127/x$) y pedir a sus estudiantes que ideen métodos para encontrar el valor faltante. Podrían emplear cualquiera de los enfoques mostrados en la figura 19 (el método del factor de escala y el de la razón unitaria).

Te*nga* en cuenta el razonamiento subyacente en cada uno de estos métodos y el modo en que claramente se fundamentan en la comprensión de los conceptos de razón y de las relaciones multiplicativas. El profesor Domínguez podría luego pedir a sus estudiantes que consideren la posibilidad de generalizar estos enfoques como otro paso adelante para lograr fluidez en la resolución de problemas que involucran relaciones de proporcionalidad.

Acciones del docente y del estudiante

La enseñanza eficaz no sólo reconoce la importancia de la comprensión conceptual y de la fluidez procedimental, sino que también garantiza que el aprendizaje de los procedimientos se desarrolle con el tiempo, teniendo un firme sustento en la comprensión y el empleo de estrategias para resolver problemas generadas por el propio estudiante. Este enfoque respalda al estudiante en el desarrollo de la habilidad para comprender y explicar su utilización de procedimientos, en elegir flexiblemente métodos y estrategias para resolver problemas contextuales y matemáticos, y en elaborar con eficacia respuestas precisas.

$$\frac{5}{13} = \frac{127}{x}$$

Método del factor de escala	Método de la razón unitaria
CA $5n = 127$ Factor de escala $n = 25.4$ ← CH $13 \cdot 25.4 = 330.2$	$5n = 13$ Razón unitaria $= 2.6$ Así que 1 CA $= 2.6$ CH $127 \cdot 2.6 = 330.2$ Chocolates en la nueva bombonera
Explicación del estudiante: “La bombonera original tenía 5 caramelos, pero la nueva tiene 127, así que 5 veces un número dado es igual a 127. Entonces 127 ÷ 5 = 25.4. Por lo que éste es el factor que necesito utilizar pues la nueva bombonera tiene 25.4 veces más caramelos. Ya que la bombonera original tenía 13 chocolates y yo necesito conservar la misma razón, tengo que multiplicar 13 por el mismo factor de escala, así que 13 × 25.4 = 330.2 chocolates para la nueva bombonera”.	Explicación del estudiante: “La razón es 5 caramelos para cada 13 chocolates, así que 5 veces un número dado es igual a 13. Si distribuyo los 13 chocolates de manera uniforme entre los 5 caramelos, se tiene: 13 ÷ 5 = 2.6, lo que da la razón que hay entre 1 caramelo por cada 2.6 chocolates, por lo tanto 2.6 es la razón unitaria. Ya que en la nueva bombonera tengo 127 caramelos, o unidades, debo multiplicar ese número por la razón unitaria, así que 127 × 2.6 = 330.2 chocolates. Bueno, entonces 330.2 es la respuesta exacta. Pero ya que los chocolates deben ser números enteros, la respuesta al problema es 330 chocolates”.

Fig. 19 Enfoques de los estudiantes al problema de la bombonera, los cuales conducen a métodos generales.

Las acciones que se listan en la tabla proporcionan un resumen de lo que los docentes y los estudiantes están llevando a cabo en el salón de clases para lograr una fluidez procedimental con base en la comprensión conceptual y en las experiencias en la resolución de problemas.

Formación de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual Acciones de los docentes y estudiantes	
¿Qué es lo que los *docentes* están haciendo?	**¿Qué es lo que los *estudiantes* están haciendo?**
Ofrecen a los estudiantes oportunidades para emplear sus métodos de resolución de problemas y sus estrategias de razonamiento propios. Les piden a los alumnos que analicen y expliquen por qué los procedimientos que están usando funcionan para resolver problemas particulares. Cuando resulta apropiado, relacionan los métodos y las estrategias ideados por los estudiantes con procedimientos más eficientes. Emplean modelos visuales a fin de reforzar la comprensión por parte de los estudiantes de los métodos generales. Proporcionan a los estudiantes oportunidades para practicar procedimientos de una forma dosificada.	Se aseguran que comprenden y que pueden explicar las bases matemáticas de los procedimientos que están usando. Muestran un uso flexible de estrategias y métodos, a la vez que reflexionan respecto de qué procedimientos parecen funcionar mejor para variedades específicas de problemas. Determinan si unos enfoques específicos se generalizan para una clase más amplia de problemas. Se esfuerzan para emplear procedimientos de manera apropiada y eficiente.

Apoyo al esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas

Una enseñanza de las matemáticas eficaz brinda consistentemente a los estudiantes, de manera individual y colectiva, las oportunidades y los apoyos para que se involucren en esfuerzos productivos a medida que aborden ideas y relaciones matemáticas.

La enseñanza eficaz de las matemáticas apoya a los estudiantes en sus esfuerzos productivos conforme están aprendiendo matemáticas. Dicha enseñanza adopta una concepción de los esfuerzos de los estudiantes como oportunidades para ahondar más en la comprensión de la estructura matemática de los problemas y de las relaciones entre ideas matemáticas, en vez de buscar sencillamente soluciones correctas. En contraposición con el esfuerzo productivo, el esfuerzo improductivo acontece cuando los estudiantes "no tienen progreso alguno en dar sentido, explicar o en abordar un problema o tarea que tengan a la mano" (Warshauer 2011, p. 21). Enfocarse en el esfuerzo del estudiante constituye un elemento necesario de la enseñanza que respalda a los estudiantes para que aprendan matemáticas comprendiéndolas (Hiebert y Grouws 2007). La enseñanza que incluye y utiliza el esfuerzo productivo reditúa beneficios de larga duración, facultando mejor a los estudiantes para que apliquen su aprendizaje a nuevos problemas contextualizados (Kapur 2010).

Análisis

En comparación con la enseñanza de las matemáticas que se lleva a cabo en países con alto desempeño, aquella que se estila en Estados Unidos se ha caracterizado por exigir en raras ocasiones a los estudiantes a que piensen y razonen mediante o acerca de las ideas matemáticas (Banilower *et al*. 2006; Hiebert y Stigler 2004). A veces los docentes perciben a la frustración o a la falta de éxito inmediato de los estudiantes como indicadores de que están fallando en algo a sus alumnos. Como resultado, se aprestan a "rescatarlos", estropeando la tarea y guiándolos paso a paso a través de las dificultades. Aunque sea bien intencionado, ese "rescate" socaba los esfuerzos de los estudiantes, disminuye la exigencia cognitiva de la tarea y priva a los alumnos de oportunidades para comprometerse cabalmente en dar sentido a las matemáticas (Reinhart 2000; Stein *et al*. 2009). Conforme los docentes planifican las lecciones, los componentes clave que deben tener en cuenta son los esfuerzos de los estudiantes y las concepciones erróneas que habrán de surgir. Tener en cuenta anticipadamente lo anterior, les permitirá pensar en formas que ayuden productivamente a sus alumnos, pero sin despojarlos de las oportunidades para desarrollar una comprensión más profunda de las matemáticas.

Los grupos de matemáticas que se comprometan con el esfuerzo productivo han de reflexionar nuevamente sobre el papel de los docentes y de los estudiantes. Éstos deben pensar una vez más lo que significa ser un aprendiz de matemáticas exitoso, así como los docentes habrán de volver a pensar lo que significa ser un maestro de matemáticas eficaz. La figura 20 resume uno de esos esfuerzos por redefinir el éxito en el salón de matemáticas (Smith 2000) e incluye las expectativas de los estudiantes respecto de lo que significa conocer y hacer matemáticas, las acciones de los profesores en torno a lo que pueden hacer para apoyar el aprendizaje de los alumnos, lo cual incluye el reconocimiento de los esfuerzos como oportunidades para aprender, así como su utilización.

Expectativas de los estudiantes	Acciones de los docentes en apoyo a los estudiantes	Indicadores de éxito basados en el salón de clases
La mayoría de los problemas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas requiere tiempo para su solución y puede presentarse la frustración; sin embargo, resulta importante que se tenga perseverancia ante la dificultad inicial.	Utiliza tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas; alienta de manera explícita a los estudiantes para que perseveren; encuentra formas de apoyarlos, sin quitar todos los retos de una tarea.	Los estudiantes se comprometen con las tareas y no se dan por vencidos. El docente los apoya cuando se "atoran", pero lo hace de una forma en la que se mantiene el pensamiento y el razonamiento a un nivel alto.
Son importantes las soluciones correctas, pero también es valioso que se pueda explicar y analizar la manera en que se abordó y resolvió una tarea particular.	Pide a los alumnos que expliquen y justifiquen la forma en que resolvieron una tarea. Evalúa tanto la calidad de la explicación como la solución final.	Los estudiantes explican la forma en que resolvieron una tarea y ofrecen justificaciones matemáticas de su razonamiento.



Cada uno tiene una responsabilidad y una obligación respecto de dar sentido a las matemáticas, mediante el planteamiento de preguntas a sus compañeros y al docente, cuando no entienda algo.	Ofrece a los estudiantes la oportunidad de analizar y determinar cuán válidas y apropiadas resultan las estrategias y soluciones.	Los alumnos cuestionan y critican el razonamiento de sus compañeros y reflexionan sobre su propia comprensión.
Los diagramas, bocetos y materiales manipulables son herramientas importantes que hay que utilizar para dar sentido a las tareas.	Brinda acceso a los alumnos a herramientas que les ayudarán en su proceso de razonamiento.	Los estudiantes son capaces de utilizar herramientas en la resolución de aquellas tareas que no pueden resolverse sin el concurso de éstas.
La comunicación del pensamiento propio mientras se realiza la tarea, posibilita que otros ayuden a que esa persona avance en la tarea.	Pide a los estudiantes que expliquen su razonamiento y plantea preguntas que se basen en el razonamiento de ellos, en vez de tomar en cuenta lo que él está pensando respecto de la tarea.	Los alumnos explican a sus compañeros y al docente su razonamiento respecto de una tarea. El profesor plantea preguntas exploratorias con base en el razonamiento de los estudiantes.

Fig. 20 Redefinición del éxito del estudiante y del docente. Adaptado de Smith (2000, p. 382)

Los docentes ejercen una gran influencia en el modo en que los estudiantes perciben y enfocan el esfuerzo dentro del salón de matemáticas. Incluso los estudiantes jóvenes pueden aprender a valorar el esfuerzo como una parte natural y esperada del aprendizaje, como se muestra en el lema de una clase de matemáticas de primer año: "Si no te esfuerzas, no estás aprendiendo" (Carter 2008, p. 136). Los profesores deben aceptar que el esfuerzo es importante para el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, transmitirles este mensaje y darles tiempo para que intenten superar sus incertidumbres. Desafortunadamente, esto quizá no sea suficiente, pues algunos simplemente se pasmarán ante la frustración, exclamando "no sé" y se darán por vencidos. Dweck (2006) mostró que los estudiantes que tienen creencias inamovibles, es decir, aquellos que consideran que la inteligencia (sobre todo la destreza matemática) es una característica innata, son más propensos a rendirse cuando afrontan dificultades, pues piensan que el aprendizaje matemático debería darse de forma natural. Por el contrario, aquellos que tienen convicciones más flexibles, es decir los que piensan que la inteligencia puede desarrollarse mediante el esfuerzo, es más probable que perseveren en su afán, pues conciben al trabajo desafiante como una oportunidad para aprender y crecer.

Al parecer, en matemáticas los estudiantes con creencias inamovibles son más predominantes en comparación con otras disciplinas (Dweck 2008). Sin embargo, la forma de pensar puede transformarse cuando los estudiantes se percatan de que tienen el control de la forma en que abordan y conciben sus propias habilidades de aprendizaje (Blackwell, Trzesniewski y Dweck 2007). Resulta importante notar que incluso los alumnos que siempre han tenido buenas calificaciones pueden tener creencias inamovibles. Estos estudiantes que obtienen mayores logros suelen estar preocupados por saber qué tan inteligentes aparentan ser, así que prefieren tareas que efectuarán bien y evitan las que puedan inducirlos a errores. Dweck (2008 p. 8) hace una importante advertencia:

En las últimas décadas, muchos padres de familia y docentes se han interesado más por hacer que los alumnos tengan confianza consigo mismos en lo que se refiere a las matemáticas y a la ciencia, que en ayudarlos a triunfar. A veces esto puede tomar la forma de alabar su inteligencia o talento y otras en exonerarlos de la responsabilidad de hacer las cosas bien; por ejemplo, al decirles que no son "matemáticos". Ambas estrategias pueden fomentar creencias inamovibles.

Un mensaje importante de esta investigación es que los docentes deben reconocer y valorar a los estudiantes gracias a su perseverancia y esfuerzo por razonar y por darle sentido a las matemáticas y han de proporcionales una retroalimentación descriptiva y específica sobre su progreso concerniente con tales esfuerzos (Clarke 2003; Hattie y Timperley 2007). Este comportamiento de los docentes pudiera comprender el darles una retroalimentación que valore sus esfuerzos por intentar diversas estrategias al resolver problemas, por su disposición favorable para plantear preguntas sobre aspectos específicos de una tarea o por sus intentos de tener precisión en sus explicaciones y en su empleo del lenguaje matemático. Por ejemplo, si los estudiantes necesitan ser más precisos en sus explicaciones verbales o escritas, el docente pudiera darles una retroalimentación que detalle la forma en que sus explicaciones tienen o carecen de precisión. El resultado será el desarrollo de aquellos estudiantes que se inclinen más por considerar a las dificultades e incertidumbres como oportunidades naturales para resolver problemas y para seguir mostrando compromiso y perseverancia en su aprendizaje matemático. (Como un ejemplo de una rutina de calentamiento que involucre a los alumnos de octavo grado en un esfuerzo productivo, véase: "Mi negativa favorita: cómo aprender de los errores" [https://www.teachingchannel.org/videos/class-warm-up-routine]).

Ejemplo

La figura 21 ilustra el modo en que las profesoras Fernández y Ramírez presentan una tarea de fracciones en una situación del mundo real a dos grupos de quinto grado. En ambos salones, algunos estudiantes de inmediato se sienten perdidos, contrariados y profieren sus sentimientos respecto de que no saben qué hacer. Las dos maestras enfrentan el desagrado de sus estudiantes de diferentes formas.

Formación de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual

Acciones de los docentes y estudiantes

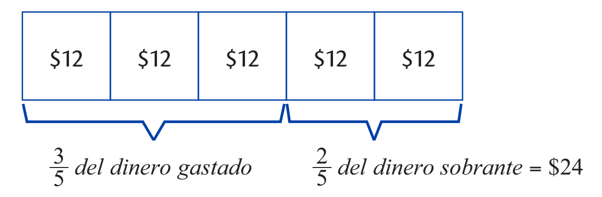
Las profesoras Fernández y Ramírez tienen grupos de quinto año y planifican sus clases de manera colaborativa. Su actual unidad de aprendizaje se centra en las fracciones. Seleccionaron la tarea "Vamos de compras", que se muestra a continuación, pues consideran que será accesible para sus alumnos aunque puede implicar un gran esfuerzo y representar un desafío, en vista de que el camino a la solución no es directa. La meta matemática para los estudiantes consiste en que hagan uso y apliquen su comprensión sobre cómo obtener fracciones no unitarias a partir de fracciones unitarias, y que utilicen representaciones visuales para resolver problemas enunciados con palabras de varias etapas.

Tarea "Vamos de compras"

Julián fue al centro comercial con sus amigos para gastar el dinero que le dieron por su cumpleaños. Cuando regresó a su casa le quedaron $24. En el centro comercial gastó 3/5 de su dinero en juegos de vídeo y en comida. ¿Cuánto dinero gastó? ¿Cuánto dinero le dieron de cumpleaños?

Cuando las maestras Fernández y Ramírez presentan el problema a su grupo, ambas se dan cuenta que los alumnos tienen problemas para comenzar. En los dos salones, algunos educandos de inmediato alzan la mano y dicen: “No entiendo” o “no sé qué hacer”.

La profesora Fernández tiene una forma orientadora en exceso de responder a sus alumnos. Les indica que dibujen un rectángulo y les muestra cómo dividirlo en quintos para que represente el dinero que Julián gastó y el que le quedó. Luego guía a sus alumnos paso a paso hasta que indican que cada quinta parte del rectángulo es igual a $12, como se muestra abajo. Por último, les dice que utilicen la información del diagrama para obtener las respuestas a las preguntas.



La manera que tiene la profesora Ramírez para abordar las dificultades de sus alumnos es muy distinta. Después de que se percata de que están batallando, les pide a todos que detengan su trabajo y que escriban dos hechos que conocen del problema y uno que desearían saber, pues esto les ayudará a avanzar en la resolución del problema. Después la maestra Ramírez da comienzo a un breve análisis, en donde se ponen a consideración algunas ideas sobre qué hacer después. Entre las sugerencias se propone dibujar un diagrama de fracciones o una recta numérica que muestren los quintos, o sólo elegir un número, digamos $50, y proceder por prueba y error. La maestra Ramírez exhorta a sus alumnos para que consideren las ideas que han compartido, conforme siguen trabajando en la tarea.

Fig. 21. Respuestas de dos profesoras ante las dificultades de sus estudiantes para resolver un problema de varias etapas que involucran fracciones.

La profesora Fernández quiere que sus alumnos tengan éxito en deducir la respuesta, por lo que comienza a dirigir el trabajo de ellos. La profesora Ramírez resiste la tentación de entrometerse y en cambio los apoya al considerar lo que saben y lo que necesitan para su deducción. Como resultado de estos enfoques distintos de las docentes en torno a cómo apoyar a los estudiantes que se están esforzando, éstos tienen muy distintas oportunidades para aprender. Los de la maestra Fernández aprenden a que si uno se esfuerza y expresa su confusión, el docente a final de cuentas les dirá qué hacer. Los de la profesora Ramírez aprenden a que si uno se esfuerza y se estanca, el maestro proporcionará cierta ayuda, pero al final uno tiene que deducir las cosas por sí mismo.

Acciones de los docentes y los estudiantes

La enseñanza eficaz de las matemáticas echa mano de los esfuerzos de los estudiantes como una oportunidad excelente para profundizar su comprensión de las matemáticas. Los alumnos se dan cuenta de que son capaces de hacer bien las cosas en matemáticas mediante el esfuerzo y la perseverancia al razonar, al dar sentido y al resolver problemas. Los docentes brindan apoyo a sus estudiantes, ya sea de manera individual o colectiva, para despejar sus incertidumbres, conforme tratan de representar una relación matemática, explicando y justificando su razonamiento, o de encontrar una estrategia de solución para un problema matemático. La tabla siguiente resume las acciones de los docentes y estudiantes que conciben al esfuerzo como un aspecto natural del aprendizaje en el salón de clases de matemáticas.

Apoyo al esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas Acciones de los docentes y estudiantes	
¿Qué es lo que los *docentes* están haciendo?	**¿Qué es lo que los *estudiantes* están haciendo?**
Anticipan aquello con lo que bregarán los estudiantes durante la clase y estar preparados para ayudarlos de manera productiva en sus esfuerzos. Brindan a los estudiantes tiempo para afrontar las tareas y plantear preguntas que den sustento al pensamiento de ellos, sin interferir haciéndoles su trabajo. Ayudan a los estudiantes para que se percaten que la confusión y los errores constituyen un aspecto natural del aprendizaje, facilitando el análisis de los errores, las ideas falsas y los esfuerzos. Exaltan el esfuerzo que ponen los alumnos para dar sentido a las ideas matemáticas, así como su perseverancia para razonar los problemas.	Forcejean a veces con las tareas matemáticas, pero sabiendo que con frecuencia los descubrimientos surgen de la confusión y del esfuerzo. Plantean preguntas que se relacionen con las causas de sus afanes y que les ayuden a progresar en su comprensión y en la resolución de tareas. Perseveran en la resolución de problemas y se dan cuenta de que resulta válido decir "no sé qué hacer aquí", pero que no es aceptable darse por vencido. Se prestan ayuda entre ellos, sin decirse la respuesta o la forma de resolver el problema.

Obtención y uso de la evidencia del pensamiento del estudiante

Una enseñanza de las matemáticas eficaz utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoyen y extiendan el aprendizaje.

La enseñanza eficaz de las matemáticas obtiene evidencias de la comprensión matemática actual de los estudiantes y la utiliza como la base para tomar decisiones de enseñanza. Este cuidado tanto de la obtención como del uso de la evidencia es un componente esencial para la evaluación formativa (Wiliam 2007a). Leahy y sus colegas (2005) observaron que: "los docentes que emplean la evaluación para la enseñanza buscan continuamente formas con las que puedan generar evidencia del aprendizaje de los alumnos y la emplean para adaptar su enseñanza, de modo que satisfaga mejor las necesidades de aprendizaje de los estudiantes" (p. 23). Centrarse en la evidencia implica identificar indicadores de lo que es importante destacar en el pensamiento matemático de los estudiantes, planificar de manera que se deduzca esa información, interpretar lo que significa la evidencia en torno al aprendizaje de los estudiantes y luego decidir la manera en que uno responde, con base en la comprensión de los alumnos (Jacobs, Lamb y Philipp 2010; Sleep y Boerst 2010; van Es 2010).



Análisis

El centrarse en la evidencia comienza con un entendimiento diáfano de lo que importa como indicador del pensamiento matemático del alumno (Chamberlin 2005; Sherin y van Es 2003) y además exige que los docentes po*NGA*n atención a algo más que la corrección o incorrección de la respuesta (Crespo 2000). Una fuente para identificar los indicadores básicos del pensamiento del estudiante es aprender las trayectorias que a la larga describen la manera en que se desarrolla la comprensión matemática de ellos (Clements y Sarama 2004; Sztajn *et al*. 2012). Otro origen para definir lo que cuenta como evidencia son los patrones comunes de razonamiento que aparecen en el pensamiento de los estudiantes, los cuales incluyen las dificultades usuales, los errores y las ideas falsas (Swan 2001).

Por ejemplo, al planificar la tarea concerniente con las sillas para el concierto de la banda, mostrada en la figura 10, el profesor Hernández elaboró una lista de indicadores clave que observaría en el trabajo de sus alumnos. De manera específica, tiene en mente buscar estrategias de descomposición de grupos o que utilicen la propiedad distributiva. También tiene pensado escuchar con el objeto de saber si los estudiantes utilizan de manera escrupulosa un lenguaje basado en los conceptos a la hora de analizar su razonamiento, como cuando analizan su descomposición y agrupamiento de conjuntos.

La recolección de evidencia no debe dejarse al azar ni ocurrir esporádicamente. La preparación de cada lección necesita incluir planes deliberados y sistemáticos para deducir la evidencia, misma que proporcionará "un flujo constante de información sobre el modo en que el aprendizaje del alumno está dirigiéndose hacia la meta deseada" (Heritage 2008, p. 6). Es inoportuno esperar hasta el acertijo del viernes o hasta el examen de la unidad para averiguar si los estudiantes están teniendo un progreso adecuado. Más bien, resulta importante identificar y arremeter contra potenciales lagunas de aprendizaje e ideas erróneas cuando sea pertinente para la mayoría de los estudiantes, lo cual es durante la enseñanza, antes de que los errores o el razonamiento incorrecto se consoliden y sean más difíciles de erradicar.

Los docentes pueden identificar los puntos estratégicos de cada lección y después planificar el modo de "registrar" el pensamiento del estudiante. Un enfoque consiste en utilizar tareas de alto nivel con objeto de que revelen el pensamiento y el razonamiento de los alumnos. Por ejemplo, aquellas tareas que obliguen al estudiante a explicar, representar y justificar la comprensión matemática y las habilidades matemáticas ofrece una evidencia más sólida de su comprensión, a fin de tener una evaluación actual y llevar a cabo decisiones de enseñanza. Otro enfoque es elaborar meticulosamente preguntas clave, antes de la enseñanza, para que emerjan comprensiones específicas, lagunas conceptuales o errores usuales, con el propósito de hacerlas explícitas y accesibles al examen y análisis (Bray 2013; Swan 2001; Schifter 2001). Por ejemplo, en el modelo de cuestionamiento tipo "enfoque" que se muestra en la figura 16 para la tarea de la circulación de monedas, el docente preguntó: "¿sería correcto que dijera que un centavo quizá no duraría más de 19 años?" El maestro preparó esta pregunta para deducir la comprensión de los estudiantes sobre la relación entre las muestras aleatorias y la generalización. Quizá hubiera podido obtener más evidencia útil de un mayor número de estudiantes si les hubiese pedido que se turnaran para intercambiar opiniones con un compañero sobre la pregunta, antes del análisis de la puesta en común, o si les hubiese pedido que contestaran la pregunta por escrito y le entregaran sus respuestas para hacer un análisis posterior a la clase.

Por último, los docentes deben tener en cuenta la forma de interpretar y de responder a lo que los estudiantes expresan, dibujan, elaboran o escriben, así como poner atención a la ausencia de una evidencia específica. Jacobs y Ambrose (2008) ofrecen varias sugerencias sobre las formas en que los docentes pudieran dar una réplica al pensamiento de los estudiantes. Por ejemplo, para apoyarlos, los docentes pueden pedirles que vuelvan a enunciar un problema con sus propias palabras, que cambien el problema para utilizar números más sencillos, o recordarles otras estrategias o herramientas que ya antes hayan utilizado, cuando no tengan éxito con una estrategia específica. A fin de ampliar el pensamiento del estudiante, pueden pedirle que compare y contraste estrategias, intente otras más refinadas para resolver el mismo problema, o que resuelva problemas similares con números seleccionados de un modo estratégico a fin de estimular estrategias más complejas. Aunque no existe tal cosa como una mejor forma de responder al pensamiento de los estudiantes, la contestación que el docente ofrezca debe tener la intención de ayudarlos a profundizar su comprensión conceptual, al mismo tiempo que los impulse a tener una fluidez procedimental y un razonamiento matemático avanzado.

Ejemplo

La figura 22 muestra las formas en que la profesora López, que tiene un grupo de primer grado, deduce y utiliza evidencia sobre el pensamiento de los estudiantes. Una vez que se percató de que algunos estudiantes no están seguros de que el signo "igual", sea un símbolo para la igualdad, la maestra López se pregunta si sus otros alumnos podrían tener también esta duda. Su meta de aprendizaje para esta lección, la cual se muestra adelante, es ayudarlos a comprender de una forma más clara que el signo de igualdad indica que las cantidades o expresiones "tienen el mismo valor". La profesora López observa diferentes soluciones y estrategias usadas en los trabajos de sus alumnos y explora el pensamiento de algunos de ellos a fin de aprender más sobre su razonamiento; asimismo, utiliza esta información para hacer ajustes a su enseñanza.

Considere el modo en que la profesora López emplea la evidencia del pensamiento de sus estudiantes a lo largo de la lección con el propósito de ajustar su trabajo de enseñanza, para poder ayudarlos a involucrarse con el discurso matemático concerniente con la igualdad y con el significado del signo "igual". En particular, note cómo el pensamiento de Gabriel sobre la rutina del "número del día", tiene una influencia tanto en las decisiones de la docente como en el razonamiento de los alumnos. Luego observe el modo en que la maestra López, al final de la clase, utiliza una sugerencia de redacción[1] para recopilar más evidencia respecto de lo que cada estudiante comprendió.

La profesora López comienza la lección pidiéndoles a cada uno de sus alumnos que resuelvan por su cuenta el problema $8 + 4 = \square + 7$. Conforme los estudiantes trabajan, toma nota de las distintas soluciones y estrategias que muestran sus trabajos y explora el pensamiento de algunos de ellos a fin de aprender más sobre su razonamiento.

La maestra López se percata que hay distintas respuestas, las cuales incluyen 12, 5, 19, 11 y 6; así que les pide a los estudiantes que busquen a un compañero que tenga una respuesta distinta a la suya para que comparen y analicen sus soluciones. La conversación se torna animosa conforme descubren que posiblemente haya muchas respuestas distintas, y se preguntan si acaso alguna de ellas es la correcta. Incluso varios estudiantes cambian su respuesta como resultado de la conversación.

1 En inglés *writing prompts*. En Estados Unidos es un recurso didáctico que consiste en hacer que los estudiantes escriban sobre un tema en particular, de una manera específica.



Después de unos cuantos minutos, la profesora les pide que traigan su trabajo al frente para que puedan analizarlo a manera de una clase. La maestra le solicita a Magda que sea la primera en compartir su trabajo (mostrado abajo a la izquierda). Magda explica que no supo qué hacer con el 7. La clase está de acuerdo en que 8 y 4 dan 12 y que esto al parecer es un hecho que es importante conocer para solucionar el problema.

A continuación Gabriel presenta su trabajo (mostrado abajo a la derecha). Aclara que el total debía ser igual en ambos lados del signo de igualdad, así que utilizó su diagrama para obtener 5, cifra que hace que ambos lados tengan a 12 como la misma cantidad total. La profesora López le pide que explique por qué pensó que se cumple que ambos lados tengan la misma cantidad. Gabriel comentó que pensó en todas las ocasiones que a veces escriben ecuaciones que sólo tienen un número a la izquierda, como 5 = 2 + 3, o cuando escriben el "número del día" de distintas formas, sin usar para nada el signo de igualdad. La maestra pide a otros estudiantes que comenten esas ideas. Alejandro añade que ellos escriben el número del día de distintas formas para nombrar al número y sugiere que este caso debe ser algo muy similar. La maestra exhorta a todos que por turnos conversen con un compañero sobre la forma en que esta tarea podría relacionarse con sus trabajos anteriores, cuando 12 era el número del día.

8 + 4 = 12 + 7

Trabajo de Magda

8 + 4 = 5 + 7

Trabajo de Gabriel

Después de seguir un poco más con la puesta en común, la profesora pide a los estudiantes que regresen a sus lugares y tomen una hoja de papel. Les solicita que planteen con sus propias palabras un problema similar y que lo usen para completar este inicio de frase: "El signo de igualdad significa que ____." Los alumnos buscan compañeros para revisar su trabajo, lo examinan y por último la profesora recoge sus trabajos para analizarlos más adelante y para considerar los próximos pasos de su trabajo de enseñanza.

Fig. 22 La deducción y el uso del pensamiento del estudiante por parte de la maestra López sobre el significado del signo de igualdad.

Acciones del docente y del estudiante

La enseñanza eficaz implica descubrir las matemáticas en los comentarios y acciones de los estudiantes, considerando lo que al parecer conocen, a la luz de las metas de aprendizaje pretendidas y del progreso realizado, también consiste en determinar cómo brindarles la mejor respuesta y el mejor apoyo, con base en su actual comprensión. Los docentes también emplean la evidencia recopilada después de la sesión de aprendizaje para que se refleje en la lección y en el progreso del estudiante e identifiquen consecuentemente los siguientes pasos a dar en la planeación de futuras lecciones y en el diseño de las intervenciones. Las acciones expuestas en la siguiente tabla resumen cómo los docentes y alumnos están utilizando en el salón de matemáticas la evidencia del pensamiento de éstos para evaluar, apoyar y ampliar el aprendizaje.

Obtención y uso de la evidencia del pensamiento del estudiante Acciones de los docentes y estudiantes	
¿Qué es lo que los *docentes* están haciendo?	**¿Qué es lo que los *estudiantes* están haciendo?**
Identifican lo que se considera evidencia del avance del estudiante hacia las metas de aprendizaje. Deducen y juntan evidencia de la comprensión del estudiante en puntos estratégicos durante la enseñanza. Interpretan el pensamiento del estudiante para evaluar la comprensión, el razonamiento y los métodos matemáticos. Toman decisiones en el momento, concernientes con la forma de responder a los alumnos mediante preguntas y respuestas rápidas que sirvan para examinar, brindar sustento y ampliar. Reflexionan sobre aprendizaje del estudiante para dar forma a la planificación de los siguientes pasos de la enseñanza.	Revelan su comprensión matemática, su razonamiento y sus métodos en el trabajo escrito y en el discurso dentro del salón de clase. Reflexionan sobre sus errores e ideas falsas para mejorar su comprensión matemática. Plantean preguntas, las responden y dan sugerencias para apoyar el aprendizaje de sus compañeros. Evalúan y dan seguimiento a su propio avance hacia las metas de aprendizaje matemático e identifican áreas en las que necesitan mejorar.

Manos a la obra

Aunque la importante labor de enseñanza no se limita a las ocho *Prácticas de la enseñanza matemática* analizadas en este capítulo, este conjunto esencial de prácticas basadas en la investigación se propone a manera de un marco teórico que refuerza la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los siguientes pasos comprometen a los docentes en brindarse apoyo mutuo de un modo colaborativo y colectivo para avanzar hacia una enseñanza perfeccionada, a través de la óptica de estas prácticas de enseñanza básicas. La enseñanza eficaz de las matemáticas comienza cuando los docentes tienen claridad y comprensión sobre las matemáticas que los estudiantes requieren aprender y la forma en que dicha enseñanza progresa a lo largo de los desarrollos de aprendizaje. El establecimiento de metas claras apoya la selección de tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas, a la vez que desarrollan la comprensión conceptual y la fluidez procedimental. Gracias a la enseñanza eficaz, el grupo enriquece el discurso matemático entre ellos, usándolo y haciendo conexiones entre las representaciones matemáticas conforme comparan y analizan diversas estrategias de solución. El docente facilita diligentemente este discurso con un cuestionamiento deliberado. Los maestros reconocen el valor que tiene el esfuerzo productivo para aprender matemáticas y auxilian a los estudiantes de modo que éstos desarrollen una disposición para perseverar en la solución de problemas. Los docentes orientan sus interacciones de enseñanza y aprendizaje mediante la evidencia del pensamiento del estudiante, de manera que puedan evaluar y mejorar el razonamiento de sus alumnos, así como su capacidad de dar sentido sobre la importancia de las ideas y relaciones matemáticas.



Elementos esenciales

Las *Prácticas de enseñanza de las matemáticas*, descritas y ejemplificadas en la sección anterior, apoyan la enseñanza eficaz de todos los estudiantes. No obstante, aunque esa enseñanza y ese aprendizaje constituyen el núcleo fundamental no negociable de programas matemáticos exitosos, forman parte de un sistema de elementos esenciales contenido en programas de matemáticas de excelencia. La implementación consistente de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas eficaces –tal y como se describió con antelación en las ocho *Prácticas de enseñanza de las matemáticas*– sólo es posible cuando los programas escolares de matemáticas contienen

- un compromiso con la **equidad** y el **acceso;**
- un **currículo** sólido;
- **herramientas** y **tecnología** apropiadas;
- una **evaluación** significativa y concordante; y
- una cultura del **profesionalismo**.

Esta sección describe y ejemplifica cada uno de estos cinco elementos esenciales de los programas de matemáticas escolares eficaces.

Acceso y equidad

Un programa de matemáticas de excelencia requiere que todos los estudiantes tengan acceso a un currículo de matemáticas de alta calidad, a técnicas de enseñanza y aprendizaje eficaces, a tener altas expectativas y al apoyo y los recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje.

La equidad no significa que cada estudiante deba recibir una idéntica enseñanza; más bien exige que se lleven a cabo ajustes razonables y apropiados, conforme se requiera, para fomentar el acceso y la realización de todos los estudiantes (*NCTM* 2000, p. 12).

A menudo, las desigualdades en el desempeño se perciben como el resultado de una jerarquía de competencia. Cuando los estudiantes que en verdad se les han brindado más oportunidades para aprender, muestran un desempeño mayor que aquellos que han tenido menos oportunidades para aprender, se les considera que son más capaces o que tienen más aptitudes. Esta forma de hablar sobre la deficiencia del desempeño, sin que se mencione la falta de oportunidades que las causa, insta a enfocarse en modelos deficientes para "explicar" el bajo desempeño en términos de factores como diferencias culturales, pobreza, bajos niveles de educación de los padres, etcétera (Flores 2007, p. 40).

A niveles de la escuela y del salón de clases, el acceso y la equidad en matemáticas se basa en creencias y prácticas que facultan a todos los estudiantes a participar de un modo significativo en el aprendizaje de las matemáticas y a lograr resultados en esa disciplina

que no se correlacionan ni se predicen a partir de las características de los estudiantes. Estos resultados incluyen el desempeño en evaluaciones matemáticas, la disposición hacia la materia, la persistencia en el trabajo a lo largo del curso de matemáticas y la habilidad de utilizarlas en verdaderos contextos (Gutiérrez 2002). El apoyo para el acceso y la equidad requiere, pero no de manera exclusiva, detentar altas expectativas, tener acceso a un currículo y una enseñanza matemáticos de alta calidad, darle a los estudiantes un tiempo adecuado para aprender, poner un énfasis apropiado en procesos diferenciados que ensanchen el compromiso productivo de los estudiantes con las matemáticas, así como contar con recursos humanos y materiales.

La *equidad* en los resultados escolares matemáticos suele conjugarse con la *igualdad* de insumos. Proporcionar a todos los estudiantes los mismos materiales curriculares, los mismos métodos de enseñanza, la misma cantidad asignada al tiempo de enseñanza y los mismos apoyos para la enseñanza basados en la escuela es algo muy distinto que asegurar que todos ellos –sin importar las características de sus antecedentes– tengan la misma probabilidad de lograr resultados significativos (Gutiérrez 2013).

Nuestra percepción del acceso y equidad exige ser sensible a los antecedentes de los estudiantes, contar con la experiencia y el conocimiento cuando se designa, implementa y evalúa la eficacia de un programa de matemáticas. Resulta esencial reconocer y afrontar los factores que contribuyen a obtener resultados diferenciados entre grupos de estudiantes para garantizar que todos ellos tengan sistemáticamente la oportunidad de experimentar una enseñanza matemática de alta calidad, de aprender contenidos matemáticos desafiantes y de recibir el apoyo necesario para tener éxito. Nuestra visión de equidad y acceso incluye garantizar que cada estudiante logre una destreza matemática y que sea mayor la cantidad de alumnos –provenientes de cualquier raza, etnia, género y grupo socioeconómico– que alcance los más altos niveles de logro matemático.

Lograr el acceso y la equidad también significa reconocer que los programas de matemáticas que han sido útiles para determinados grupos de estudiantes, privilegian en efecto a unos alumnos en detrimento de otros, por lo que deben examinarse y mejorarse de una forma crítica en caso de ser necesario, con el objeto de asegurar que habrán de satisfacer las necesidades de *todos* los estudiantes. Es decir, los programas deben funcionar con estudiantes negros, latinos, indios americanos o con miembros de otras minorías, así como también con aquellos que se consideran como blancos, como mujeres o como hombres, como estudiantes pobres o ricos, como estudiantes que están aprendiendo una segunda lengua (inglés, en este caso) o como angloparlantes nativos, como estudiantes que no han tenido éxito en la escuela y en matemáticas, o que son estudiantes exitosos, como estudiantes cuyos padres tuvieron un acceso limitado a oportunidades educativas o cuyos padres tuvieron amplio acceso a éstas. Es más, prestar atención al acceso y a la igualdad significa reconocer que pueden existir oportunidades de aprendizaje inequitativas en cualquier contexto –sea diverso u homogéneo– siempre que algunos maestros, pero no todos, implementen currículos rigurosos o utilicen las *Prácticas de enseñanza matemática* descritas antes.

Una gran cantidad de trabajo de investigación ha documentado que es posible lograr importantes resultados cuando las escuelas y los docentes de modo sistemático se aprestan para superar los obstáculos para el éxito en matemáticas, que experimentan los estudiantes pertenecientes a poblaciones históricamente desatendidas (Boaler 1997, 2006; Boaler y Staples 2008; Campbell 1996; Cross *et al*., 2012; Gutiérrez 2000; Kisker *et al*., 2012; Knapp



et al., 1995; Lipka *et al*., 2007; McKenzie *et al*., 2011). La cuestión no reside en que todos los estudiantes puedan tener éxito en las matemáticas, sino en que los adultos responsables de organizar las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas sean capaces de alterar las creencias y prácticas tradicionales a fin de promover el éxito de todos.

Obstáculos

Existe una gama de obstáculos que impiden avanzar significativamente hacia el cumplimiento del *Principio de acceso y equidad*. Uno de éstos tiene que ver con la calidad de la instrucción disponible para los estudiantes. Los investigadores han encontrado consistentemente que es más probable que los estudiantes que viven en la pobreza, urbana o rural, y aquéllos a los que se les ha dificultado aprender matemáticas, hayan tenido maestros con escasos antecedentes matemáticos, menos experiencia profesional, con una certificación en otras disciplinas pero no en matemáticas y que se les considera menos eficaces (Battey 2013; Darling-Hammond 2007; Flores 2007; Stiff, Johnson y Akos 2011). Es más, en lo concerniente con la enseñanza para estos estudiantes, rara vez se implementan de modo constante las *Prácticas de enseñanza matemática* descritas antes, a fin de fortalecer el aprendizaje significativo. Por el contrario, las lecciones suelen centrarse principalmente en habilidades y procedimientos rutinarios, que prestan escasa atención al aprendizaje significativo de las matemáticas (Ellis 2008; Ellis y Berry 2005).

Otro obstáculo que enfrentan el acceso y la equidad implica la existencia de oportunidades diferenciadas para aprender contenido matemático para su grado de estudios de alta calidad y un apego a las altas expectativas para el desempeño matemático (Jackson *et al*. 2013; Phelps *et al*., 2012; Walker 2003). Esto suele ocurrir como una consecuencia de la práctica de “encasillamiento”, o de clasificar académicamente a los estudiantes sobre la base de una plausible capacidad, lo cual es una política incuestionable o comúnmente tolerada, que más del 85% de las escuelas estadounidenses practica, y que limita la participación y el éxito de los estudiantes (Biafora y Ansalone 2008). El encasillamiento sentencia a algunos estudiantes a un contenido matemático poco sustancioso (Burris *et al*., 2008). Mientras que se espera que muchos estudiantes se comprometan con una variedad de temas matemáticos por medio de múltiples estrategias de enseñanza y aprendizaje, aquellos que están en las casillas bajas suelen lidiar con un currículo matemático estrecho y fragmentado, transmitido mediante un conjunto reducido de estrategias de enseñanza y aprendizaje (Ellis 2008; Tate y Rousseau 2002). Las capacidades de los así llamados estudiantes de bajo nivel suelen subestimarse, debido a las creencias improductivas que se describen más adelante, provocando que se les brinden menos oportunidades para aprender matemáticas desafiantes. Estos estudiantes caen en un círculo vicioso de bajas expectativas: en vista de que se espera poco de ellos, se esfuerzan al mínimo, esos tibios afanes refuerzan las bajas expectativas, dando como resultado un escaso desempeño (Gamoran 2011).

Los defensores del encasillamiento argumentan que esta práctica socorre a la enseñanza y el aprendizaje matemático al compaginar los niveles de capacidad de los estudiantes con un currículo apropiado (Schmidt, Cogan y Houang 2011). La suposición que subyace en esta creencia afirma que al establecer diversas casillas se tiene una estrategia eficaz para acomodar las distintas necesidades de los estudiantes. Se cree que el encasillamiento facilita los desafíos de la enseñanza al reducir el intervalo de las diferencias entre los educandos, de modo que las prácticas de enseñanza pueden dirigirse a un conjunto más

pequeño de necesidades de los estudiantes. Lo que está implícito en esta creencia es la idea de que si los alumnos de bajo nivel y los de alto nivel compartieran el mismo ambiente de aprendizaje obtendrían pocos beneficios, o ninguno.

A pesar de que cierta investigación apoya el hecho de juntar a los estudiantes dotados y talentosos en grupos homogéneos para maximizar su aprendizaje (Delcourt *et al*., 1994), también muestra que el aprendizaje de los estudiantes asignados a los grupos de capacidad menor se reduce, independientemente de sus niveles de capacidad (Stiff, Johnson y Akos 2011). Además, una vez que se ubica a los estudiantes en grupos de bajo nivel o "lentos", es muy probable que permanezcan en esos grupos hasta que salgan de la escuela (Boaler 2008; Ellis 2008). Si a los estudiantes de secundaria que se cree que están en riesgo respecto a las matemáticas se les ofrece cursos de su nivel y se les proporciona el apoyo necesario para que tengan éxito en los mismos los avances en su desempeño son considerables y más grande será la probabilidad de que en los siguientes años se inscriban a cursos de matemáticas de nivel superior, que si se les hubiera asignado a un curso de matemáticas para estudiantes de menor capacidad (Boaler y Staples 2008; Burris, Heubert y Levin 2006). Es más, la evidencia apunta a que los estudiantes de alto desempeño que están en salones heterogéneos no son estadísticamente distintos de los estudiantes encasillados en grupos homogéneos en cuanto a su desempeño y participación en cursos de matemáticas de Nivel Avanzado (NA) (Burris, Heubert y Levin 2006; Staples 2008).

Quitar a los grupos de bajo nivel no significa eliminar a los de nivel avanzado o establecer cursos de educación media superior más rigurosos. Un programa eficaz de matemáticas apoya y desafía tanto a los estudiantes que han demostrado un elevado interés y desempeño en matemáticas, como a los que no los evidenciaron. Sin embargo, el hecho de ofrecer dos niveles de cursos en la educación media superior, en los que en ambos tengan una enseñanza y un currículo de alta calidad, es muy distinto a la práctica usual de brindar varios niveles del mismo curso (verbigracia: álgebra 1, álgebra aplicada, álgebra superior 1, introducción al álgebra, álgebra elemental de primer año), con distintas expectativas y diferentes currículos (Schmidt, Cogan y McKnight 2010). Más aun, cuando los programas de matemáticas ofrecen cursos avanzados, deben asegurarse de que para todos los estudiantes haya vías para alcanzar los cursos de nivel superior, además de brindar apoyo para fomentar su participación y éxito.

Resulta más perturbador la falta de autoconfianza que demasiados estudiantes desarrollan y que los induce a concebir las matemáticas como algo que está más allá de su comprensión y que no esperan entender jamás. Piensan que las matemáticas están al alcance de sólo unos cuantos "genios matemáticos" excepcionales. Quizá los padres refuercen de manera inadvertida esta noción al justificar el bajo desempeño de sus hijos como si fuese un destino genético (al decir por ejemplo, "yo tampoco fui bueno jamás para las matemáticas".) Incluso los docentes tal vez fortalezcan esta concepción errónea al elegir a los alumnos según su habilidad, creyendo que algunos "pueden con las matemáticas" y otros no.

Estos obstáculos serían raros si jamás se pusieran límites deliberadamente a la participación o el desempeño de grupos de estudiantes. Más bien, aquellos surgen, en parte, de un conjunto de creencias, las cuales se resumen en la siguiente tabla, que deben reconocerse y analizarse abiertamente. Resulta importante notar que tales creencias no deben considerarse buenas o malas, sino más bien como productivas cuando conducen a un cambio y



promueven la equidad, e improductivas cuando a los estudiantes les restringen el acceso a contenidos y prácticas matemáticos importantes. Es poco probable que se logre la meta de que todos los estudiantes tengan éxito en las matemáticas, si no se confrontan las creencias improductivas.

La siguiente tabla compara algunas creencias productivas con las improductivas que influyen en el acceso que los estudiantes tienen a una enseñanza eficaz, a un currículo de alta calidad y a apoyos de aprendizaje diferenciados.

Creencias concernientes con el acceso y la equidad en matemáticas	
Creencias improductivas	**Creencias productivas**
Los estudiantes tienen niveles de capacidad diferentes e innatos para las matemáticas, los cuales no pueden modificarse mediante la enseñanza. Determinados grupos o individuos poseen esa capacidad, pero otros no.	La capacidad matemática está en función de la oportunidad, la experiencia y el esfuerzo; no depende de la inteligencia innata. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas cultivan las habilidades en esa materia. Todos los alumnos son capaces de participar y tener éxito en las matemáticas y cada uno merece tener apoyo para lograr altos niveles.
La equidad es lo mismo que la igualdad. Todos los estudiantes requieren tener las mismas oportunidades de aprendizaje, de modo que puedan lograr los mismos resultados académicos.	La equidad se logra cuando los estudiantes reciben los apoyos diferenciados (a saber: tiempo, enseñanza, materiales curriculares y programas) que se requieren para garantizar que cada uno de ellos tenga éxito con las matemáticas.
La equidad es sólo un tema que concierne a las escuelas que tienen una diversidad étnica y racial o una cantidad importante de estudiantes de bajos ingresos.	La equidad se aplica en todos los escenarios, asegurando que cada estudiante tenga acceso a un currículo, una enseñanza y apoyos de alta calidad, necesarios para que tenga éxito.
Los alumnos que no tienen una fluidez en la lengua inglesa, son menos capaces de aprender matemáticas y en consecuencia deben estar en un grupo separado de estudiantes que están aprendiendo el inglés (ELLs, por sus siglas en inglés).	Cuando se emplean estrategias educativas apropiadas, los estudiantes que no tienen fluidez con la lengua inglesa pueden aprender el lenguaje de las matemáticas a un nivel igual o superior, al mismo tiempo que aprenden inglés.
El aprendizaje matemático no depende de la cultura del estudiante, de sus condiciones ni del lenguaje, así que para ser eficaces, los docentes no necesitan tomar en cuenta ninguno de estos factores.	La enseñanza eficaz de las matemáticas eleva la cultura, las condiciones y el lenguaje de los estudiantes para fortalecer y mejorar el aprendizaje matemático.

Los estudiantes pobres no cuentan con las características cognitivas, emocionales y de comportamiento necesarias para participar y triunfar en matemáticas.	Las prácticas eficaces de enseñanza (es decir, las que comprometen a los estudiantes con las tareas desafiantes, el discurso y la resolución de problemas abiertos) tienen el potencial de ofrecer mayores oportunidades para tener un pensamiento de orden superior y para elevar el desempeño matemático de todos los alumnos, incluyendo a los pobres y a los de bajos ingresos.
La práctica de encasillar fomenta el desempeño de los alumnos, pues permite que se les ubiquen en grupos y clases "homogéneos", en donde pueden lograr los mayores beneficios en su aprendizaje.	Debe eliminarse la práctica de aislar a los estudiantes de bajo desempeño, colocándolos en grupos de matemáticas de bajo nivel o de ritmo más lento.
Sólo los estudiantes dotados o con alto desempeño pueden reflexionar sobre problemas matemáticos desafiantes, darles sentido y perseverar en resolverlos.	Todos los estudiantes son capaces de perseverar en la resolución y de dar sentido a problemas matemáticos desafiantes, lo cual debería esperarse que hicieran. Se necesita ofrecer apoyo, dar confianza y brindar oportunidades para que una mayor cantidad de educandos alcance niveles mucho más altos de interés en las matemáticas y de éxito en la disciplina, sin importar su género, etnia y estatus socioeconómico.

Superación de los obstáculos

Lograr la equidad en lo concerniente con los resultados del aprendizaje de los estudiantes requerirá que los docentes de todos los niveles tengan la convicción de que todos los educandos pueden aprender. Para eliminar las brechas de aprendizaje se necesita que cada alumno tenga acceso a una enseñanza de alta calidad, un currículo desafiante y a oportunidades extracurriculares estimulantes, así como a un enriquecimiento y apoyos diferenciados, necesarios para alentar el éxito del estudiante a niveles continuamente ascendentes.

Creencias y expectativas

Para garantizar que todos los estudiantes tengan acceso a un programa de matemáticas equitativo, los docentes necesitan identificar, reconocer y analizar el modo de pensar y las creencias que tienen respecto de las capacidades de los estudiantes. Las ideas fijas (es decir, la forma de pensar según la cual los niveles de habilidad matemática son inamovibles y no se pueden cambiar), cuando se articulan con los estereotipos sociales sobre la capacidad académica basados en las características de los alumnos, eternizan las prácticas improductivas descritas antes (Dweck 2008). Por el contrario, un modo de pensar incluyente, que subraya la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como un proceso que cultiva las habilidades de esta disciplina, hace hincapié en que el éxito y el aprendizaje constituyen un reflejo del esfuerzo y no nada más de la inteligencia; por consiguiente sustentan la creencia que todo estudiante es capaz de participar y de tener éxito en las matemáticas (Boaler 2011; Dweck 2006).



Creer en un modo de pensar incluyente y actuar en congruencia con éste, a diferencia de hacerlo con un pensamiento inmutable, puede significar una enorme diferencia respecto de lo que los estudiantes logren. Ajustarse y actuar con base en unas altas expectativas y en una creencia genuina de que el esfuerzo de los estudiantes y una enseñanza eficaz importa más que las "aflicciones" y las circunstancias, acrecienta las oportunidades de aprendizaje del alumno. Los docentes con un modo de pensar inmutable pueden justificar incorrectamente la asignación diferenciada de recursos y oportunidades, con base en los pasados logros académicos o las anteriores habilidades e intereses de los estudiantes. El trabajo de investigación ha descubierto que un modo de pensar inmutable –relacionado de manera muy estrecha con antecedentes socioeconómicos– contribuye a ampliar la brecha de las oportunidades y refuerza las desigualdades (Dweck 2008; Gamoran 2010). Para superar este obstáculo, los docentes deben promover y mostrar en todo momento un modo de pensar incluyente. Este modo de pensar valora el pensamiento de todos los estudiantes y emplea prácticas pedagógicas como las tareas diferenciadas, el agrupamiento de educandos con diferentes habilidades y el elogio público por las contribuciones y la perseverancia, a fin de cultivar la participación y el desempeño en matemáticas (Boaler 2011).

Fomentar el compromiso del alumno (a través de tareas desafiantes, de aplicar un intenso esfuerzo y concentración en la implementación de tareas), construir las matemáticas con un modo de pensar incluyente, reconocer las contribuciones del estudiante y no perder de vista la cultura y el lenguaje, desempeñan un papel sustancial en la distribución igualitaria de los beneficios matemáticos entre alumnos pobres y no pobres (Battey 2013; Cross *et al*. 2012; Kisker *et al*. 2012; Robinson 2013). Es más, brindar un mayor acceso a los estudiantes pobres y de bajos ingresos a una enseñanza que implemente de manera eficaz las *Prácticas de enseñanza matemática* descritas antes, tiene el potencial de ofrecer mayores oportunidades para que se tenga un razonamiento de mayor nivel y para aumentar la calidad intelectual de la cognición del estudiante (Boaler y Staples 2008; Burris *et al*. 2008; Lubienski 2007).

Los docentes pueden dejar atrás con mayor facilidad prácticas pasadas, como el encasillamiento que aísla a los estudiantes, y a su vez desarrollar prácticas productivas que apoyen el aprendizaje para todos, si muestran un compromiso sistémico con todos los estudiantes y si tienen expectativas que cada uno de ellos pueda alcanzar o exceder los estándares matemáticos por nivel.

Currículo y enseñanza

Cuando surgen diferencias, como siempre sucederá, en cuanto a habilidad, antecedentes e intereses, los obstáculos antes mencionados pueden superarse mediante una enseñanza más eficaz y con apoyos diferenciados. Es más probable incrementar el desempeño con políticas que: impulsan y complementan el aprendizaje, brindan tiempo adicional, ofrecen a los estudiantes el acceso a un currículo riguroso y cuentan con maestros que implementan una variedad de enfoques y recursos; en vez de hacerlo con políticas que relegan a categorías ínfimas con un currículo nada desafiante, a los alumnos que tradicionalmente tienen un menor desempeño.

Cuando todos los estudiantes tienen acceso a matemáticas de alta calidad y rigurosas, enseñadas por docentes que no sólo comprenden la disciplina sino que también entienden y reconocen de maneras significativas los contextos culturales y sociales de los aprendices,

se angostan las brechas persistentes e inaceptables y a final de cuentas desaparecen. Los maestros eficaces hacen uso de los recursos de la comunidad para entender el modo en que pueden utilizar los contextos, la cultura, las condiciones y el lenguaje a fin de apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Berry y Ellis 2013; Cross *et al*. 2012; Kisker *et al*. 2012; Moschkovich 1999, 2011; Planas y Civil 2013). Como resultado, aprender matemáticas se convierte en una parte del sentido de identidad del estudiante, lo cual conduce a un creciente compromiso y una mayor motivación hacia las matemáticas (Aguirre, Mayfield-Ingram y Martin 2013; Boaler 1997; Hogan 2008; Middleton y Jansen 2011).

Los ambientes del salón de clase que fomentan un sentido de comunidad, mismo que permite a los alumnos expresar sus ideas matemáticas –junto con las normas ideadas para que los estudiantes comuniquen su pensamiento matemático a sus compañeros y a su maestro de manera oral y escrita, empleando el lenguaje de las matemáticas– influyen de modo positivo en la participación y el compromiso de los alumnos (Horn 2012; Webel 2010). Todos los estudiantes, incluyendo los que están aprendiendo inglés como segunda lengua, pueden aprender un contenido matemático, al mismo tiempo que aprenden el lenguaje académico de las matemáticas, tanto en inglés como mediante los símbolos (Razfar, Khisty y Chval 2011). El lenguaje de las matemáticas ofrece una oportunidad a muchos alumnos, incluyendo a los que están aprendiendo inglés, para mostrar su preparación anterior y para ayudarse mutuamente a través del lenguaje que comparten: el lenguaje de las matemáticas (Moschkovich 1999, 2011).

Es más, enfocarse en las prácticas matemáticas esbozadas en los *CCSSM*, puede beneficiar a los alumnos en todos los niveles, al comprometerlos en construir matemáticas de maneras que para ellos tenga sentido. Más que imponer un algoritmo estándar o un conjunto de estrategias de solución, los alumnos pueden idear sus propias estrategias que les resulten más significativas, más fáciles de recordar o culturalmente familiares (Carpenter *et al*. 1989). Resultan particularmente útiles para este esfuerzo los problemas que permiten que se les aborde de muchas formas y que admiten el empleo de un amplio abanico de estrategias o enfoques. Los estudiantes más avanzados pueden ampliar su pensamiento conforme trabajen con problemas de este tipo, en tanto que los menos avanzados, incluyendo a los que tienen discapacidades, tienen oportunidad de continuar desarrollando sus saberes básicos en los que necesitan progresar (Dieker *et al*. 2011). Es más, los problemas en los que los alumnos pueden introducirse y razonar en múltiples niveles, pueden adaptarse a una variedad de estilos de aprendizaje y antecedentes culturales.

Intervenciones y personal de apoyo

Apoyar el éxito de cada estudiante requiere contar con un programa de intervención eficaz, listo para abordar las dificultades de aprendizaje tan pronto como se presenten. Aunque las características específicas para diseñar programas variarán según el nivel y otros factores, los programas de intervención eficaz deberían:

- ser obligatorios y no opcionales (es decir, siempre que se pueda, habrán de programarse durante el día escolar);
- estar basados en una supervisión constante del progreso de los estudiantes, según se determine por los resultados de la evaluación formativa y sumativa, con el fin de asegurar que se les ofrezca apoyo tan pronto como sea posible;



- prestar atención a la comprensión conceptual, así como a la fluidez en los procedimientos; y
- permitir un ingreso y egreso flexibles de la intervención, conforme lo necesiten los estudiantes (Kanold y Larson 2012).

Una opción consiste en dar esa intervención durante el tiempo regular dedicado a la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, los docentes de las escuelas primarias del mismo grado, quizá decidan programar al mismo tiempo su bloque de 95 minutos de matemáticas, de modo que puedan emplear los primeros 20 minutos de cada periodo para la intervención matemática, estando los alumnos reagrupados en los salones de acuerdo con sus necesidades de aprendizaje, y luego regresar a grupos heterogéneos para la clase de matemáticas usual.

Otra opción es dedicar un tiempo adicional fuera del curso de matemáticas de ese nivel, durante el cual los estudiantes que presenten lagunas de aprendizaje puedan recibir un apoyo específico y dirigido (Burris *et al*. 2008; Rubin y Noguera 2004). Estas oportunidades de aprendizaje adicionales debieran permitir a los educandos explorar las matemáticas a un nivel profundo, intrigante e innovador. Tales sesiones podrían darse asignando una "doble dosis" de tiempo para las matemáticas y fuera de los días escolares regulares. Además del apoyo al currículo normal, si se logra atraer a los alumnos a actividades co-curriculares y extra-curriculares –como clubes, círculos y competencias matemáticos, y se les da acceso a mentores– esto puede ser de ayuda para que logren los máximos niveles de pasión, creatividad y pericias matemáticas, independientemente de su género, etnia o estatus socioeconómico. Dichos recursos debieran permitirles no sólo concebir a las matemáticas como materia escolar, sino que logren apreciar su belleza, maravilla, utilidad y vitalidad a un profundo nivel, lo cual les ayudará a incorporarla a su futura capacidad de tomar decisiones a alto nivel.

Otra estrategia para fomentar el total y equitativo acceso a las oportunidades para aprender matemáticas, es el despliegue de personal de apoyo educativo (por ejemplo, maestros de apoyo[2], docentes interventores[3] o especialistas dotados) que puedan brindar servicios especializados de apoyo a las escuelas y los docentes o que puedan trabajar directamente con los alumnos que tengan un desempeño menor, que excedan los estándares de destreza de su nivel o que exhiban curiosidad y deseo por aprender más de las matemáticas. Las escuelas que atienden a los aprendices de diversos contextos y que tienen necesidades de aprendizaje variadas pueden utilizar la ayuda de los asesores pedagógicos matemáticos de la escuela, así como de los especialistas con el objeto de perfeccionar las habilidades y capacidades de los docentes para satisfacer las necesidades de enseñanza individuales de los alumnos, mejorar la enseñanza y dar seguimiento al progreso de los estudiantes. Los asesores pedagógicos y los especialistas en matemáticas pueden influir de un modo positivo en las creencias de los docentes concernientes con la enseñanza y el aprendizaje de esta asignatura, aumentar la participación de éstos en actividades profesionales distintas del asesoramiento, como: asistir a reuniones enfocadas a las matemáticas de un nivel particular, observar la labor de enseñanza de sus colegas o asistir a talleres de matemáticas para toda la escuela (Campbell y Markus 2011).

2 En inglés *mathematics resource teachers*. No se les asigna un único grupo. Trabajan con alumnos de varios grupos que necesitan ayuda especial.
3 En inglés *intervention teachers*. Son docentes que se asignan a escuelas de bajo rendimiento para que puedan mejorarlo.

Ejemplo

El siguiente ejemplo muestra una intervención a nivel de educación media superior para garantizar que todos los estudiantes sigan adelante, aprendiendo matemáticas desafiantes de alto nivel.

Los docentes y los administradores de educación media superior en un estado del Atlántico meridional llegaron a percatarse de que una gran cantidad de alumnos de noveno grado no estaban teniendo éxito en Álgebra 1. Para abordar este asunto, los docentes de matemáticas y los administradores escolares comenzaron teniendo reuniones de manera regular donde se daba una sesión de lluvia de ideas para acometer esta inequidad. Al revisar los registros de estos estudiantes, encontraron que la correlación entre su logro en la evaluación estatal para octavo grado y su desempeño en la asignatura de noveno año, Álgebra 1, era extremadamente alta. Los docentes concluyeron que era muy probable que muchos de esos estudiantes presentaran lagunas de conocimiento que les impedían alcanzar su máximo potencial cuando cursaron Álgebra 1.

Para resolver este problema, la escuela diseñó un nuevo curso, seminario de Álgebra, destinado al casi 20% de los estudiantes de noveno año, sobre todo para aquellos que obtuvieron una calificación de “suficiente” o “insuficiente” en la evaluación de octavo año y que por lo tanto era muy poco probable que aprobaran el examen final de Álgebra 1, si se inscribían en un curso normal de dicha asignatura. A fin de garantizar que los alumnos de este curso recibieran los niveles de apoyo adecuados, el director estuvo de acuerdo en asignar a los docentes del seminario de Álgebra un tiempo para la planificación conjunta, de modo que pudieran diseñar en forma colaborativa ese curso, planificar las lecciones y mejorar las prácticas pedagógicas.

Las distintas características de diseño del nuevo curso de seminario de Álgebra constituyen una intervención eficaz que cumple con la visión del *Principio de equidad y acceso.* El nuevo curso…

- enseña el contenido del curso de Álgebra 1 junto con el contenido fundamental de pre-requisito, con un enfoque “justo a tiempo” de este último contenido;
- es un equipo docente formado por profesores de matemáticas y maestros de educación especial, a fin de asegurar que las necesidades especiales de los estudiantes que forman el grueso del grupo reciban el apoyo adicional que necesitan para triunfar;
- está planificado de una manera sistemática, con un doble de tiempo continuo para la clase (90 minutos al día);
- se tiene pensado para un cupo de 18 alumnos, de manera que los docentes tengan la oportunidad de atender las necesidades individuales de los estudiantes;
- se ha mejorado mediante un desarrollo profesional enfocado en los docentes;
- emplea una amplia variedad de recursos, impresos y no impresos, básicos y suplementarios;
- compromete a los estudiantes y mejora la enseñanza a través de diversas herramientas y tecnologías, incluyendo pizarrones interactivos, calculadoras graficadoras, tabletas, tableta interactiva de respuestas, y una gama de materiales manipulables;



- incorpora una gran variedad de prácticas de aprendizaje sumamente eficaces que reflejan las *Prácticas de la enseñanza matemática;* además
- elabora planes en línea de las lecciones, así como otros recursos que los docentes utilizan para comenzar su planificación.

Como resultado de esta intervención bien diseñada y comprehensiva, los estudiantes del seminario de Álgebra se ponen al día consistentemente y tienen un desempeño igual que el mostrado en el examen final por los alumnos inscritos en el curso regular de Álgebra 1, de modo que están listos para inscribirse el próximo año en un curso regular de Geometría.

Manos a la obra

Para ofrecer acceso y equidad, los docentes van más allá de "la buena enseñanza", brindando una enseñanza que garantice que todos los estudiantes tengan la oportunidad de comprometerse exitosamente con las clases de matemáticas y aprender matemáticas desafiantes. Hacer que los *Principios* sean una realidad exige que todas las partes interesadas estén al tanto del grado en que cada uno de los estudiantes tenga acceso a un currículo matemático desafiante, puesto en práctica por docentes eficaces y diestros que sepan y comprendan las culturas y las comunidades de donde proceden los alumnos y que empleen también este conocimiento para elaborar tareas significativas basadas en el conocimiento previo y las experiencias anteriores de los estudiantes. Tales maestros también darán seguimiento al progreso de los alumnos y harán los ajustes necesarios. Con objeto de llevar a cabo esto de una manera eficaz, habrán de trabajar en forma colaborativa con sus colegas, incluyendo a los docentes de educación especial, los maestros de estudiantes avanzados y los que están aprendiendo inglés como segunda lengua, así como también con las familias y los miembros de la comunidad, con el objeto de garantizar que todos los educandos reciban el apoyo que necesitan para maximizar su éxito en el salón de clases de matemáticas. Incluso, los docentes requieren de la mutua colaboración a fin de implementar las *Prácticas de la enseñanza matemática* esbozadas con anterioridad y promover un modo de pensar incluyente en sus grupos y escuelas.

Por último, deben revisarse las políticas distritales y de cada escuela para garantizar que las prácticas sistémicas no pongan en desventaja a grupos o subgrupos particulares de estudiantes, basadas en estereotipos sociales. Este análisis deberá incluir una revisión de la práctica de encasillamiento, la ubicación del alumno, las oportunidades para remediar y mejorar, así como los resultados de los estudiantes, no dejando a un lado la tenacidad mostrada en el estudio de las matemáticas.

Currículo

Un programa de matemáticas de excelencia incluye un currículo que amplíe unas matemáticas significativas y unos desarrollos de aprendizaje coherentes, así como también que acreciente las conexiones entre las áreas de estudio matemático y los vínculos entre las matemáticas y el mundo real.

¿Qué se entiende por *currículo*? En muchas ocasiones, los docentes y los miembros de la comunidad emplean el término *currículo* y *libros de texto* de manera equivalente, de igual modo que muchas otras personas suelen pasar por alto la diferencia entre *estándares* y *currículo*. Los *estándares* son enunciados de lo que se espera que aprendan los estudiantes. Los estándares son los *fines*. Un *currículo* es el programa utilizado para auxiliar a los educandos a fin de que satisfagan los estándares, lo cual incluye materiales educativos, actividades, tareas, unidades, lecciones y evaluaciones. El currículo constituye los *medios*.

Los estándares habrán de diseñarse con desarrollos de aprendizaje deliberados (o trayectorias) que abarquen el espectro de la educación primaria y media (pre-K-12) y más allá. El diseño de un currículo implica una “secuencia de pensamientos, formas de razonar y estrategias que el estudiante utiliza cuando aprende un tema” (Battista 2011). Por ejemplo, en los *CCSSM* las ideas matemáticas se construyen al desarrollarlas año tras año, sobre las que había antes, donde el alumno hace conexiones con los temas anteriores a la vez que pone los fundamentos del aprendizaje futuro (Daro, Mosher y Corcoran 2011). Consecuentemente, los currículos basados en los *CCSSM* deberían diseñarse de tal modo que los educandos y los docentes puedan llevar a cabo conexiones matemáticas entre los temas del contenido que saquen provecho de la estructura subyacente de los *CCSSM*, de tal forma que, por ejemplo, los alumnos puedan sopesar la utilización de un modelo geométrico cuando estén explorando un patrón de números, o utilicen las razones cuando estén analizando un problema de probabilidad. La amplia perspectiva de los desarrollos de aprendizaje, en cualquier conjunto de estándares académicos o laborales, debe orientar tanto el trabajo de desarrollo de marcos teóricos curriculares y de otros recursos educativos por parte de las escuelas y los distritos, como los esfuerzos de los autores de libros de texto y de otros materiales didácticos.

Los currículos matemáticos se pueden caracterizar desde una perspectiva horizontal y vertical. Desde la primera perspectiva, los docentes necesitan un conocimiento profundo de las matemáticas y de los materiales que emplean para su labor de enseñanza en un curso o grado específico. Desde esta perspectiva, los docentes de cuarto año requieren un conocimiento profundo de todo el contenido que se abarcará ese año, de los conceptos y habilidades que necesitan enseñarse, la manera en que los temas se conectan entre sí, el modo en que el contenido matemático se secuencia, cuánto tiempo podría requerirse para cada tema, las herramientas (como libros de texto, materiales y tecnología) disponibles para reforzar el contenido y cómo se evalúa la comprensión de los estándares de contenido de los alumnos de cuarto año.

Desde una perspectiva vertical, los docentes de cuarto grado necesitan comprender lo que los alumnos han aprendido en el pasado, cómo el currículo de este año se construye con base en el conocimiento y las experiencias previas y la manera en que el contenido matemático que se estudie este año sentará los cimientos de los temas que los alumnos



explorarán en quinto año y los siguientes. Una comprensión vertical del currículo ayuda a los docentes a comprometerse en un diálogo con sus colegas que tiene grupos de grados distintos al suyo (o con docentes que tendrán cursos anteriores o posteriores en las escuelas de nivel medio superior), de modo que puedan examinar las fortalezas y debilidades del programa en su conjunto a fin de dar prioridad a las necesidades de los estudiantes.

Obstáculos

El contenido incluido en los libros de texto influye en lo que se enseña y lo que los maestros enfatizan en el salón de clases (Schmidt, Houang y Cohen 2002; Tarr *et al*. 2006). Algunos libros de texto están organizados de un modo eficaz para centrarse en las grandes ideas matemáticas, como las bosquejadas en los *CCSSM* y en los estándares estatales o provinciales, y además remarcan las conexiones entre los temas. Desafortunadamente, otros tienen una organización menos eficiente y las escuelas suelen hacer demasiado énfasis en seguir el contenido y la secuencia de esos materiales. Incluso la falta de un conocimiento a fondo del contenido que algunos profesores esperan enseñar, pudiera inhibir su capacidad de enseñar de un modo significativo, eficaz y que permita la vinculación de las secuencias de la lección, independientemente de los materiales que tengan a mano.

Los estándares de contenido matemático por nivel se consideran con mucha frecuencia como una lista de verificación de los temas. Cuando se les concibe de este modo, el contenido matemático deviene sólo un conjunto de habilidades inconexas, que suelen no tener un contexto matemático o de la realidad y que están desvinculadas de temas relacionados. Una secuencia típica de un curso tradicional de matemáticas de nivel medio superior que requiere un año para estudiar Álgebra 1, otro año para Geometría y otro más para Álgebra 2, suele enfocarse en cubrir una lista de temas, en vez de presentar un programa coherente que “descubra” esos temas, estableciendo conexiones entre ellos a lo largo de los tres años. Se pueden observar efectos similares en otros grados, cuando el año escolar se organiza en unidades disjuntas que abarcan distintos dominios de las matemáticas.

Aun teniendo el mejor modelo de currículo, en algunos grupos se hace la planificación de lecciones en una base de día con día, siguiendo ciegamente las secciones de un libro de texto, pero poniendo poca atención a un currículo más amplio, a aplicaciones contextuales de las matemáticas, a los desarrollos de los temas, así como al modo en que éstos se conjugan. Es más, los mapas curriculares y las guías para la dosificación de temas suelen imponer el tema y a veces el número de páginas de un libro que debe estudiarse cada día del año escolar, sin considerar las diferencias entre los estudiantes y los grupos. Los docentes que utilizan guías para la dosificación de temas tienden a sentirse apurados y como resultado suelen omitir tareas de resolución de problemas sustanciosos y desafiantes que son esenciales para desarrollar una comprensión matemática más profunda (David y Greene 2007).

La siguiente tabla compara algunas creencias productivas e improductivas que influyen en la implementación de un currículo eficaz. Resulta importante remarcar que no debe concebirse a las creencias como buenas o malas, sino más bien como productivas cuando refuerzan la enseñanza y el aprendizaje eficaces o improductivas cuando limitan a los estudiantes el acceso a un contenido y unas prácticas importantes.

Creencias sobre el currículo de matemáticas	
Creencias improductivas	**Creencias productivas**
El contenido y la secuencia de temas en un libro de texto siempre definen el currículo. Todo lo que se incluye en el libro de texto es importante y debe siempre abordarse; además lo que no está en él no es importante.	Los estándares deberían guiar las decisiones respecto de los temas que se abordan y los que se omiten en el currículo. La forma de utilizar un libro de texto depende de su calidad; es decir, del grado en que brinda una enseñanza de contenido coherente y balanceada, que se apegue a los estándares y ofrezca lecciones que apoyen de manera consistente la implementación de las *Prácticas de enseñanza matemática.*
Conocer el currículo matemático para un grado particular o curso es suficiente para enseñar de manera eficaz el contenido a los estudiantes.	Los docentes de matemáticas necesitan tener una comprensión diáfana del currículo de uno y de todos los grados —en otras palabras, los desarrollos de aprendizaje del alumno— para enseñar eficazmente un grado o curso particulares de la secuencia.
La implementación de una guía dosificada garantiza que los docentes abarquen todos los temas requeridos y asegura la continuidad, de modo que todos los alumnos están estudiando el mismo tema en los mismos días.	Los mapas curriculares y las guías para la dosificación de temas tratan de garantizar toda la cobertura del contenido, pero no aseguran que los estudiantes aprendan matemáticas. Se debe dar el tiempo requerido a fin de prepararse para un aprendizaje significativo, una diferenciación; además, las intervenciones deben encargarse de que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda del contenido.
Las matemáticas son una disciplina estática e inmutable.	Las matemáticas son un campo dinámico en constante cambio. Los énfasis en el currículo están en evolución, por lo que resulta importante aceptar y adaptarse a los cambios apropiados
La disponibilidad de currículos matemáticos abiertos significa que cada docente debería diseñar su propio currículo y libro de texto.	Los currículos abiertos son recursos que deben examinarse en forma colaborativa y emplearse para apoyar los desarrollos de aprendizaje establecidos de un programa de matemáticas coherente y eficaz.

Superación de los obstáculos

Un currículo de matemáticas es más que una colección de actividades; representa más bien una secuencia coherente de ideas matemáticas básicas que están bien articuladas para uno y todos los grados y cursos. Esos currículos plantean problemas que fomentan la comprensión conceptual, la resolución de problemas y el razonamiento; además se extraen de contextos cotidianos y de otras disciplinas.

Diseño de estándares y de currículo

A la luz de la ingente cantidad de matemáticas que pudieran abarcarse en cualquier grado o curso, resulta trascendental hacer cuidadosas elecciones sobre las matemáticas específicas que se incluyan. Aquellos estándares que se usan para diseñar un currículo, así como sus documentos relacionados, necesitan considerar con detenimiento si los temas quedan en el currículo debido a la tradición, o, si se requieren para promover la aptitud de los estudiantes para la universidad, el mercado laboral y la vida, lo cual resulta más importante. Algunos temas quizá justifiquen una mayor atención, en vista de su ocurrencia frecuente en las matemáticas que los educandos utilizarán en el futuro, en sus estudios después de la secundaria o en su lugar de trabajo.

Por ejemplo, tal y como el *NCTM* lo avala en el documento *Enfoque en las matemáticas de nivel medio superior* (2009), la estadística cada vez más se ha reconocido como algo esencial para el éxito de los alumnos cuando se topan con requerimientos de nacionalidad, empleo y educación continua (Franklin *et al*. 2007; *College Board* 2006; *American Diploma Project* 2004). De igual forma, las matemáticas discretas, el pensamiento algorítmico y la construcción de modelos matemáticos quizá exijan mayor atención, en vista de su importancia para las ciencias de la computación y sus campos afines. Los currículos matemáticos también han de reflejar los cambios de énfasis dentro del campo de las matemáticas. Tal y como el informe de *Mathematical Science in 2025* [Las ciencias matemáticas en 2025] (*National Research Council* 2013a, p. 2) manifiesta:

> *El trabajo de las ciencias matemáticas cada vez más está siendo un componente esencial e integral de un creciente conglomerado de áreas de investigación en biología, medicina, ciencias sociales, negocios, diseño avanzado, ciencias ambientales, finanzas, materiales avanzados y otras muchas más. Este trabajo involucra la integración de las matemáticas, la estadística y la computación en el más amplio sentido, así como la acción recíproca de estas áreas con otras de aplicación potencial.*

Por último, el diseño curricular requiere tomar en consideración la cantidad de nuevo contenido que se debe introducir en un curso o grado particular, de modo que se tenga el tiempo suficiente para enseñar conceptos y procedimientos, mediante la aplicación de las *Prácticas de la enseñanza matemática*. Esto es, se necesita el tiempo suficiente para:

- comprometer a los estudiantes en tareas que alienten la resolución de problemas y el razonamiento, a fin de dar sentido a las nuevas ideas matemáticas;
- comprometer a los educandos en análisis matemáticos significativos; y
- lograr una fluidez en los procedimientos, con fundamento en la comprensión conceptual.

Una de las características positivas de los *CCSSM* es su enfoque y coherencia en los grados de preescolar a tercero de educación media superior, así como su demora en el esperado dominio de los algoritmos estándares para las operaciones. Tales características proporcionan a los estudiantes tiempo de enseñanza con el objeto de que logren la comprensión conceptual y la destreza en las prácticas matemáticas, así como para que desarrollen soltura en los algoritmos estándares para las operaciones, la cual se basa en la comprensión de las propiedades, operaciones y el sistema numérico decimal.

Implementación del currículo

Los docentes que tienen una sólida preparación en su conocimiento de las matemáticas, del pensamiento del estudiante y del currículo escolar están en una posición que les permite apreciar cómo evoluciona el pensamiento matemático con el tiempo y están preparados para ayudar a los alumnos a vincular temas con el objeto de reforzar su comprensión (Ball, Thames y Phelps 2008). Asimismo, cuando los docentes reconocen la importancia de desarrollar la destreza de los estudiantes mediante prácticas matemáticas, pueden seleccionar e implementar de modo más eficaz tareas apropiadas que destaquen el pensamiento matemático desde preescolar hasta el último año de educación media. Los materiales educativos y las tareas seleccionadas por las escuelas tienen una gran influencia en lo que los educandos aprenden y en la forma en que lo aprenden (Stein, Remillard y Smith 2007). Por lo tanto, los docentes necesitan tener un desarrollo profesional de alta calidad a fin de maximizar la efectividad de tales materiales, ya que incluso los mejores libros de texto y recursos pueden malinterpretarse o dárseles un uso inadecuado.

No debe tomarse a la ligera la selección de libros de texto, en vista de que tanto a ellos como a su potencialidad para apoyar la enseñanza se les asigna un papel central como recurso. Este proceso no debe tener en cuenta nada más que los libros de texto "cubran" los estándares, sino también que su tratamiento de los contenidos refleje los desarrollos de aprendizaje enfocados en la comprensión conceptual y haga énfasis en las prácticas matemáticas (Bush *et al*. 2011; *NGA Center* y *CCSSO* 2013). Como se analizó antes, las *Prácticas de la enseñanza matemática* alientan la comprensión conceptual de los educandos, así como su destreza en las prácticas matemáticas. En consecuencia, otro criterio de selección importante es la medida en que las lecciones de un libro de texto apoyan de manera consistente tales prácticas de enseñanza.

El empleo apropiado de los libros de texto –ya sea que la enseñanza se base en ellos lección por lección casi de manera exclusiva, o que se les considera un recurso entre muchos otros– depende de la calidad de los mismos, como se definió con antelación. Si un libro de texto desarrolla los temas matemáticos de un modo coherente, con base en los desarrollos de aprendizaje y ofrece lecciones que apoyan constantemente las *Prácticas de enseñanza matemática*, entonces tiene sentido basar fundamentalmente la enseñanza en él; además pueden disminuir las omisiones o desviaciones importantes, y más bien mejorar la calidad de la enseñanza (Banilower *et al*. 2006). En forma inversa, si un libro de texto no brinda ese apoyo, entonces la única opción es considerarlo, conforme se necesite, como uno más de los múltiples recursos y suplementos.

Algunas escuelas elaboran guías para la dosificación de temas para garantizar que la enseñanza abarque todos los estándares requeridos para el año escolar y para que se invierta un tiempo adecuado en cada tema. A pesar de que estos recursos puedan ayudar a los docentes en la planificación a corto y largo plazo, las necesidades de los grupos individuales y de cada educando deben tener prioridad sobre la calendarización curricular rígida. La colaboración entre los profesores a lo largo del año escolar puede dar como resultado ajustes apropiados y adaptaciones de las guías para la dosificación de temas, con el objeto de atender las fortalezas y debilidades del estudiante.

La estructuración de unidades –y de las lecciones dentro de éstas– alrededor de temas o enfoques matemáticos amplios, en vez de hacerlo con base en listas de habilidades espe-



cíficas, construye una coherencia que ofrece a los estudiantes el conocimiento base para que el aprendizaje de las matemáticas sea más robusto y significativo. En particular, poner atención a las prácticas matemáticas dota a los estudiantes de herramientas matemáticas importantes que necesitan para navegar por contextos y situaciones matemáticos. Al planificar las lecciones, los docentes deberán tener también en consideración los estándares y las necesidades de desarrollo que se pretende tenga el alumno. Así pues, deben tomarse cuidadosas consideraciones en torno a las formas adecuadas de dar secuencia a una serie de lecciones. La planificación diaria de la lección habrá de considerar una perspectiva más amplia de lo que los educandos aprendieron antes y a dónde se les dirige hacia el futuro; asimismo, los contextos pueden utilizarse para motivar y ayudar a los alumnos a comprender la razón por la que algunos temas particulares son importantes.

Matemáticas de nivel medio superior

Los esfuerzos por lograr una coherencia curricular en matemáticas a nivel medio superior son especialmente desafiantes, dada la secuencia usual de los cursos y temas en los cuales el estudio de la geometría suele aislarse para ser un curso separado y la estadística se injerta en los cursos a manera de unidades autónomas, en vez de vincularla de forma natural con temas relacionados (por ejemplo, el empleo de una línea visual que se ajuste mejor conduce al estudio formal de las funciones lineales). Algunas escuelas han reconfigurado con éxito sus programas como una secuencia integrada de cursos que abarcan temas de álgebra, geometría, estadística, probabilidad y matemáticas discretas a lo largo de todos los niveles, lo cual posibilita a los estudiantes volver a estudiar esos temas pero a niveles crecientemente complejos y hacer vinculaciones entre ellos. Dichas reconfiguraciones necesitan desarrollar el razonamiento matemático y auxiliar a los alumnos a percatarse, por ejemplo, cómo un problema de probabilidad se puede resolver empleando un modelo geométrico, o el modo en que se pueden efectuar las transformaciones geométricas de figuras mediante el uso de matrices algebraicas.

Todas las escuelas de nivel medio superior deberían reconsiderar sus programas de matemáticas a fin de determinar si la actual secuencia de los cursos está preparando a los estudiantes para las exigencias del mercado laboral, mismo que demandará más que el dominio de habilidades matemáticas aisladas. Tal reconsideración pudiera requerir que los docentes sepan “cómo y por qué se deducen los modelos matemáticos”, el modo de “construir sus propios modelos” y la forma de “pensar la manera en que se integra la relación existente entre los modelos y las matemáticas” (Keck y Lott 2003, p. 131). Los esfuerzos por lograr coherencia a lo largo del currículo de la educación media superior revisten una enorme importancia.

Vinculación y revisión del currículo

El currículo de matemáticas no debe ser sólo coherente, sino que también habrá de realizar conexiones entre éste y otras disciplinas. Por ejemplo, el documento *A Framework for K-12 Science Education* [Un marco teórico de la educación científica para los grados K-12] (*National Research Council* 2012) y su posterior publicación *Next Generation Science Standards* [Estándares científicos de nueva generación] (*National Research Council* 2013b) tienen una gran trascendencia para las matemáticas. Las prácticas de la ciencia y la ingeniería tienen mucho en común con las prácticas matemáticas esbozadas en los *CCSSM*

y de hecho se considera como una de las prácticas científicas el "uso del razonamiento matemático y computacional". Incluso la ciencia en gran medida sirve de fundamento a los conceptos matemáticos, por ejemplo "la escala, la proporción y la cantidad" se lista como uno de los siete conceptos transversales.

Por último, todos los documentos relacionados con el currículo (nacional, estatal o provincial, y local) necesitan someterse a una revisión periódica para garantizar que reflejen tanto las prioridades cambiantes relacionadas con las matemáticas que los educandos requieren aprender, como la investigación reciente sobre desarrollos de aprendizaje eficaces. Aunque resulta necesario cierta estabilidad en esos documentos, se requiere también que posibiliten el progreso hacia las metas que establecen, así que deben ponerse en marcha mecanismos específicos que den seguimiento a los cambios necesarios de modo que se actualicen los documentos sobre una base regular.

Ejemplo

Poner una atención eficaz al currículo implica un seguimiento periódico, haciendo revisiones a los cursos conforme se requiera. Considere por ejemplo un departamento de matemáticas de una escuela de nivel medio superior que se compromete en el desarrollo profesional durante el verano para revisar una unidad sobre congruencia para el siguiente año. Éste es uno de los temas que el departamento considera que los alumnos no han aprendido al nivel esperado en los dos años anteriores. Los docentes reconocen que el *CCSSM* incluye estándares para la utilización de transformaciones a fin de ayudar a que los estudiantes den sentido a la congruencia y de que algunos enfoques de las series de libros de texto adoptados no abordan de manera adecuada tales estándares. Es más, están conscientes de que algunos de estos enfoques sobre el tema que el libro ofrece no necesariamente cubren los estándares. Como resultado de la revisión del desempeño estudiantil, los profesores del departamento están de acuerdo en que pueden omitir dos de las secciones de un capítulo del libro.

En otra reunión, los maestros observan que cuando los alumnos están en la escuela de nivel medio, analizan la idea de que la traslación, la reflexión o la rotación de una figura producen una forma congruente. También se dan cuenta de que en uno de los primeros capítulos del libro de texto para el nivel medio superior se hace una exploración de las parábolas y del modo en que la localización de las curvas, así como sus formas, está relacionada con sus ecuaciones. Deciden que en vez de estudiar las ecuaciones cuadráticas y las parábolas a principios de año y luego separar este tema de la congruencia, pueden vincular el contenido de los dos capítulos a fin de que ambos temas sean más significativos para sus alumnos.

Los docentes acuerdan, como grupo, ubicar las transformaciones como el fundamento de la unidad. En el examen que presentan los alumnos sobre parábolas, introducirán una revisión de las transformaciones. Luego, al ir construyendo este tema, pedirán a sus estudiantes que hagan una investigación sobre la congruencia desde el punto de vista de las transformaciones geométricas. Aunque este contenido forma parte de los estándares, los profesores pueden reordenar y restructurar el material del libro de texto y de los materiales auxiliares a fin de satisfacer las necesidades de los estudiantes de una manera más eficaz.



Cuando en su enseñanza siguen la secuencia de las lecciones que han preparado como equipo, los docentes pedirán continuamente a los estudiantes que cambien la perspectiva que están utilizando, a saber: de abordar una situación de manera algebraica a explorar el modo en que se conecta con la geometría que han estado estudiando. Una vez que los profesores cuentan con líneas generales para alcanzar la meta y han llevado a cabo un calendario tentativo para cada lección, se percatan que el próximo paso consiste en identificar las tareas apropiadas que construirán la comprensión conceptual y el razonamiento matemático de los estudiantes. Analizan las tareas que ofrece el libro de texto, así como las de otros recursos curriculares, como sitios web, y planifican una unidad restructurada que auxiliará a los alumnos a hacer conexiones y a lograr un nivel más alto. Al siguiente año escolar recopilarán los datos sobre el éxito de los educandos y revisarán sus planes, conforme se necesite a futuro.

Manos a la obra

Hacer realidad el *Principio del currículo* requerirá que todos los involucrados se centren en ayudar a los educandos para que logren estándares desafiantes a través de la implementación de un currículo coherente. Los docentes requieren entablar un diálogo con sus colegas para familiarizarse más con las expectativas matemáticas de los estándares que están guiando su enseñanza, lo cual incluye el análisis del modo en que estas ideas se desarrollan en los componentes verticales y horizontales del currículo. Necesitan evaluar en qué medida los materiales y los recursos curriculares se alinean y apoyan el aprendizaje significativo del alumno, concerniente con el contenido y las prácticas señalados en los estándares.

Mientras tanto, los administradores pueden ayudar a la implementación de los estándares promoviendo el desarrollo profesional significativo, mismo que ayuda a los docentes a hacer un uso más eficaz de los materiales curriculares. Los administradores habrán de reconocer que las guías para la dosificación de temas, los libros de texto y otros materiales de enseñanza pueden guiar el proceso de planificación, pero que nunca tomarán el lugar del docente en cuanto a determinar cómo satisfacer de modo más eficaz las necesidades de los estudiantes para una clase particular. Por último, los planificadores de currículo de todos los niveles deberán dar una secuencia al contenido con objeto de maximizar la coherencia y las conexiones a lo largo de todos los temas de la unidad y de los grados y cursos. Para lograr lo anterior de manera más eficaz al nivel de la educación media superior, los educadores habrán de tener en cuenta un enfoque integrado, como una vía para ayudar a los estudiantes a comprender las matemáticas como una disciplina, en vez de considerarla como un conjunto aislado de cursos.

Herramientas y tecnología

Un programa de matemáticas de excelencia integra la utilización de la tecnología y las herramientas matemáticas como un recurso esencial con el objeto de auxiliar a los estudiantes a aprender, darle sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y a comunicar su pensamiento matemático.

Para un aprendizaje significativo de esta disciplina, las herramientas y la tecnología deben considerarse como características indispensables del salón de clase. Las herramientas matemáticas útiles incluyen, para los primeros grados, objetos manipulables, como fichas, cubos para ensamblar, bloques de patrones, bloques decimales y bloques de construcción; y para los últimos grados mosaicos algebraicos, geoplanos, transportadores, compases y escuadras, así como modelos geométricos. La tecnología abarca pizarrones interactivos y una amplia variedad de dispositivos portátiles, tabletas, computadoras portátiles y de escritorio que pueden emplearse para ayudar a los estudiantes a darles sentido a las matemáticas, a comprometerse con el razonamiento matemático y para poder comunicarse matemáticamente.

En muchas escuelas, el uso de las calculadoras, como herramienta tecnológica es común dentro del salón de clases, las cuales pueden ser desde aquellas que tienen las operaciones básicas (para los primeros grados), hasta las calculadoras graficadoras para los últimos grados. Sin embargo, el panorama de la tecnología está cambiando con rapidez. Los dispositivos móviles como las tabletas y los teléfonos inteligentes de gama alta con interfaces táctiles tienen muchas de las funciones de las computadoras de escritorio, lo cual borra las fronteras entre las calculadoras avanzadas diseñadas específicamente para usos matemáticos y los dispositivos de cómputo más generales. Las tabletas y los teléfonos inteligentes pueden utilizarse para reunir datos, hacer encuestas en el salón de clase y correr aplicaciones que hagan cálculos, simulaciones de corridas de programas, así como para fomentar la visualización, permitiendo que los alumnos se entretengan con juegos que exijan habilidades para la resolución de problemas.

Por tanto, la plataforma de la tecnología es menos importante que la funcionalidad que ofrece. Las computadoras, tabletas, teléfonos inteligentes y calculadoras avanzadas hacen asequibles una gama de aplicaciones que auxilian a los usuarios a explorar matemáticas, a dar sentido a los conceptos y procedimientos, y a involucrarlos con el razonamiento matemático. Las aplicaciones gráficas pueden permitir a los alumnos examinar múltiples representaciones de funciones y de datos, al generar gráficas, tablas y expresiones simbólicas que estén vinculadas en forma dinámica. Las aplicaciones de hojas de cálculo pueden mostrar con rapidez los resultados de cálculos iterativos y generar tablas de valores mediante una variedad de representaciones gráficas; estas dos aplicaciones posibilitan que los alumnos desarrollen su conocimiento sobre las relaciones y las estructuras matemáticas. Los sistemas de cómputo para el álgebra (CAS, por sus siglas en inglés) pueden trabajar con enunciados algebraicos. Las aplicaciones de geometría interactiva (dinámica) permiten analizar conjeturas geométricas –las cuales incluyen aquellas que tienen contextos sintéticos, de coordenadas y de transformaciones– en vista de que, en diagramas bien construidos, se conservan las relaciones subyacentes entre ellos al arrastrar los objetos. Las herramientas para hacer modelos matemáticos resultan útiles para examinar objetos tridimensionales. Las aplicaciones de análisis de datos varían desde las que son más in-



tuitivas (utilizadas en los primeros grados) hasta las que realizan análisis avanzados y que resultan apropiadas para los estudiantes de nivel medio superior. Muchas aplicaciones despliegan representaciones dinámicas que posibilitan al usuario involucrarse en análisis del tipo "¿qué pasa si…?"

Es más, tener acceso a un abanico de aplicaciones de software pudiera ayudar a los estudiantes a explorar situaciones matemáticas particulares. Por ejemplo, un geoplano –sea físico o virtual como el mostrado en la figura 23– pudiera auxiliar a los alumnos a averiguar las propiedades de los triángulos, en tanto que una aplicación CAS pudiera facilitar el análisis de los parámetros de las funciones, como se explica en la figura 24.

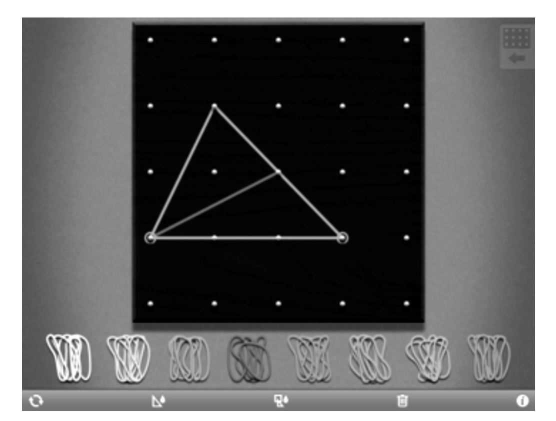


Fig. 23. Modelo virtual de un geoplano, para una tableta.

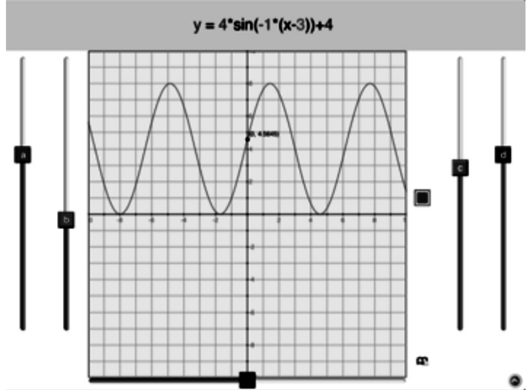


Fig. 24. Utilización de una aplicación para analizar los efectos de los parámetros de una función seno.

La utilización de herramientas electrónicas suele centrarse en lo que Dick y Hollebrands (2011) llaman "tecnología de matemáticas dinámicas", misma que genera respuestas basadas en el ingreso de datos por parte de los usuarios, lo cual les posibilita explorar ideas matemáticas y observar, hacer y probar conjeturas concernientes con las relaciones matemáticas. Observe que las matemáticas dinámicas también subyacen en el uso de herramientas matemáticas no electrónicas, como los objetos físicos manipulables.

Las tecnologías y herramientas no matemáticas (por ejemplo, los procesadores de texto, los programas para presentaciones y las aplicaciones para la comunicación) también pueden propiciar la interacción al interior del grupo (Cohen y Hollebrands 2011). Por ejemplo, las respuestas de los alumnos que participan en una encuesta interactiva pueden recopilarse con rapidez mediante una tableta interactiva de respuestas o a través de aplicaciones para una variedad de plataformas de dispositivos móviles que den a los docentes información formativa que pudiera ayudarles a guiar su enseñanza. Los pizarrones interactivos, los proyectores de documentos y las aplicaciones para presentaciones basadas en la Web pueden auxiliar a los alumnos para que comuniquen su pensamiento a sus compañeros y para recibir retroalimentación constructiva. El trabajo colaborativo de los educandos puede ir más allá de estar frente a frente con sus compañeros, al utilizar plataformas seguras basadas en la Web para colocar y comentar los archivos electrónicos multimedia, las imágenes digitales del trabajo estudiantil y los archivos de presentación hechos por los alumnos. Los estudiantes pudieran hacer uso de mensajes de texto, de documentos colocados en la

nube para compartirse, de los pizarrones virtuales, los *blogs* o los *wikis* a fin de colaborar en los problemas matemáticos al interior de la escuela o con estudiantes de otros estados, provincias o incluso países (Roschelle *et al*. 2010). Al hacer uso de estas herramientas electrónicas, los educandos consideran que se apropian en mayor medida de las matemáticas que están aprendiendo, debido a que las aplicaciones fomentan para el aprendizaje de las matemáticas un sentido de empresa compartida.

Por último, una amplia variedad de recursos basados en la Web refuerzan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los docentes utilizan cada vez más las páginas electrónicas personales y para compartir, con el objeto de organizar y categorizar los recursos que encuentran de mayor utilidad. Estas listas les permiten ubicar con rapidez recursos que en el pasado consideraron valiosos y los comparten mediante las redes sociales. La capacidad que los docentes muestran para hacer lo anterior significa, en cierto sentido, que abren virtualmente la puerta del salón de clases para dar paso a la colaboración entre los estudiantes y maestros. Incluso éstos pueden organizar páginas para compartir, con el objeto de mejorar la comunicación con sus alumnos, con los padres de éstos o con sus tutores.

Obstáculos

Muchas escuelas y docentes se vanaglorian de estar actualizados en cuanto a tecnología y herramientas se refiere. No obstante, el valor de la tecnología depende de que los estudiantes verdaderamente se comprometan con tecnologías o herramientas específicas, de formas que fomenten el razonamiento matemático y la habilidad para dar sentido. Que los alumnos observen un tutorial o una presentación en computadora en los que se presenten hechos y ejemplos matemáticos, sin importar qué tanta atracción visual tenga, no difiere significativamente del hecho de que observen al profesor escribir la misma información en un pizarrón interactivo o uno tradicional; en consecuencia, lo anterior no resulta más eficaz en cuanto a proporcionar acceso a los educandos o en cuanto a dar sentido a las ideas matemáticas. Que los estudiantes vean una conferencia en línea no fomenta en mayor medida las prácticas matemáticas, que si la presenciaran en vivo. En aras de "dar vuelta" a su clase, algunos docentes exigen a sus alumnos en sus casas vean una conferencia en línea y que luego el próximo día completen hojas ejercicios en la clase, pero estas acciones quizá no hagan que los estudiantes se comprometan más en darle sentido a las matemáticas, que si tuvieran una lección en el salón de clase y que se les pidiera que completaran planas como tarea en casa. El elemento clave es que los educandos del grupo "dado vuelta" se comprometan con un aprendizaje activo, al resolver problemas que alienten el razonamiento y la construcción de conocimiento. Hasta el momento, ninguna evidencia científica consistente señala que "dar vuelta a una clase"–en ausencia de un enfoque mayor en el aprendizaje conceptual y de la capacidad del estudiante de dar sentido–, sea una práctica educativa que mejore el aprendizaje del alumno (Goodwin y Miller 2013). Los maestros de matemáticas deberán adoptar juiciosamente la tecnología que respalde la enseñanza eficaz, pero no nada más por el hecho de emplear mayor tecnología en el salón de clases.

De igual forma, los docentes quizá sólo enseñen a los estudiantes procedimientos para utilizar herramientas o tecnología en la resolución de problemas, sin que les ofrezcan oportunidades de pensar en los problemas o de vincular los procedimientos con un razonamiento matemático más formal. Por ejemplo, un maestro tal vez proporcione a sus alumnos instrucciones para que usen los bloques decimales, para que resuelvan problemas



de sumas con números de varios dígitos, pero no les brinde la oportunidad de utilizar los bloques para que indaguen el significado matemático que está detrás del algoritmo para ese tipo de suma. Incluso aunque los alumnos ya hayan adquirido la comprensión de un tema mediante el empleo de aplicaciones que están diseñadas para que hurguen en hechos y procedimientos matemáticos –las cuales pueden desarrollar la memoria y la soltura– el uso de tales aplicaciones no generará una comprensión conceptual (Erwanger 2004).

Las escuelas, los padres y los docentes en ocasiones limitan a los educandos el empleo de herramientas y tecnología matemáticas por temor a que se conviertan en un soporte. Para evitar este resultado, sólo les permiten usarlas para verificar las respuestas o como un premio después de haber aprendido a resolver problemas mediante el papel y lápiz. En los primeros grados quizá los docentes piensen que la utilización de las calculadoras impida a los educandos adquirir destreza en las combinaciones básicas de números. En los grados superiores, los docentes tal vez consideren que el uso de la tecnología no permita a los alumnos alcanzar el nivel de habilidades algebraicas que necesitan para estudiar más adelante. En algunos casos, sólo a los estudiantes dotados o de alto desempeño se les dan oportunidades para utilizar herramientas a fin de que exploren temas avanzados, en tanto que a otros se les limita el uso de tecnología para que la enfoquen en habilidades de menor nivel. En estas últimas situaciones, los materiales manipulables –ya sean físicos o virtuales– quizá se utilicen en los primeros grados sólo como “una actividad lúdica” o como distracción de la rutina; y en los grados superiores ese tipo de herramientas a veces se consideran como inmaduras e innecesarias. Cuando ocurren casos como éstos, se dejan pasar las oportunidades para maximizar el potencial de las herramientas matemáticas y la tecnología para apoyar y mejorar el aprendizaje matemático.

Es más, en ocasiones la enseñanza incorpora la tecnología matemática en formas que no promueven el razonamiento matemático, la habilidad para dar sentido ni la comunicación. Los docentes tal vez incorporen la tecnología sólo como un auxiliar para cálculos, que los alumnos emplean sin tener en consideración sus limitaciones o sin reflexionar sobre los resultados que proporciona. En consecuencia, cuando los estudiantes (o docentes) utilizan calculadoras u hojas de cálculo para obtener las respuestas, quizá acepten los resultados mostrados como respuestas correctas sin pensar si esos resultados tienen sentido o la forma en que se aplican al contexto del problema. Incluso, tal vez los educandos apliquen conscientemente una herramienta favorita (física o virtual) sin pensar –o sin que tengan un profesor que los desafíe a que reflexionen– en su conveniencia o en si pudiera haber un enfoque más fructífero. Estos usos improductivos de las herramientas y la tecnología restringen las oportunidades de los estudiantes para razonar sobre las matemáticas o con el auxilio de éstas aunque demuestran la importancia del papel que desempeñan los maestros que tienen un profundo conocimiento de las matemáticas y entienden el modo en que las herramientas y la tecnología pueden utilizarse de una forma estratégica para reforzar el aprendizaje significativo.

Una serie de obstáculos ajenos al salón de clases también causan un impacto en el empleo eficaz de las herramientas y la tecnología. En algunas escuelas, sobre todo en las pobres, quizá no se cuente con tecnología ni con otras herramientas, como resultado de la distribución desigual de los recursos. Incluso, los docentes tal vez no tengan acceso a la tecnología o carezcan de una capacitación adecuada para darles un uso eficaz en el fomento del aprendizaje matemático de los estudiantes. En algunas situaciones tal vez la tecnolo-

gía y las herramientas potencialmente valiosas estén sin utilizarse en armarios o en repisas o se empleen en una forma improductiva. Algunas escuelas acaso estén bien equipadas con computadoras conectadas a internet, pero sus conexiones inalámbricas sean obsoletas por lo que proporcionan un acceso intermitente a herramientas de la Web. Asimismo, los libros de texto y los materiales curriculares quizá afirmen que incorporan la tecnología y las herramientas, pero no lo hacen en formas que ayuden a los docentes a fomentar el razonamiento y la habilidad de dar sentido, acrecentando de ese modo la dificultad de los maestros para encontrar actividades apropiadas. En algunos libros de texto, el uso de la tecnología se pone de relieve con un recuadro o se presenta como una característica agregada, como si se diera a entender que el enfoque en ella resulta opcional o innecesario. Por último, las políticas estatales o provinciales posiblemente restrinjan drásticamente el empleo de la tecnología y de las herramientas en las evaluaciones obligatorias, dando como resultado que los docentes quizá sean reacios a permitir que los estudiantes usen la tecnología que no se evalúe en los exámenes.

La siguiente tabla compara algunas creencias improductivas y productivas que influyen en la implementación de las herramientas y la tecnología en el salón de clases. Resulta importante observar que tales creencias no deben considerarse como buenas o malas, sino más bien como productivas cuando apoyan eficazmente la enseñanza y el aprendizaje, o improductivas cuando limitan el acceso de los estudiantes a contenidos y prácticas matemáticos importantes.

Creencias respecto de las herramientas y la tecnología para el aprendizaje matemático

Creencias improductivas	Creencias productivas
Las calculadoras y otras herramientas son, en el mejor de los casos, una extravagancia o distracción, y en el peor un soporte que aleja a los estudiantes del aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos deberían utilizar esas herramientas sólo después de que haber aprendido cómo realizar procedimientos con lápiz y papel.	La tecnología es un hecho ineludible de la vida en el mundo en que vivimos y debiera adoptarse como una poderosa herramienta para hacer matemáticas. El empleo de la tecnología puede ayudar a los alumnos a visualizar y comprender importantes conceptos matemáticos y a respaldar su razonamiento matemático y su capacidad para la resolución de problemas.
Las matemáticas escolares son estáticas. Lo que los educandos necesitan saber sobre las matemáticas no cambia (o quizá se vea amenazado) por la presencia de la tecnología.	La tecnología y otras herramientas no sólo cambian la manera de enseñar, sino que también influyen en lo que debe enseñarse. Pueden ayudar a los alumnos a investigar los problemas y las ideas matemáticos, que de otra forma serían muy difíciles de explorar o que tomarían mucho tiempo.
Los materiales manipulables, físicos y virtuales, sólo debieran usarlos los estudiantes muy jóvenes que necesitan apoyos visuales y oportunidades para investigar mediante la manipulación de aquéllos.	Los estudiantes de todos los niveles pueden beneficiarse del uso de materiales física o virtualmente manipulables, a fin de proporcionar modelos visuales de una gama de ideas matemáticas.

Creencias respecto de las herramientas y la tecnología para el aprendizaje matemático	
Creencias improductivas	**Creencias productivas**
La tecnología debe emplearse sobre todo como una forma rápida para obtener respuestas correctas a los cálculos.	Encontrar respuestas a los cálculos matemáticos no basta. Los educandos necesitan comprender si una respuesta es razonable y cómo se aplican los resultados a un contexto específico. También requieren ser capaces de considerar la relativa utilidad de una gama de herramientas en contextos particulares.
Sólo unos elegidos, como los alumnos más avanzados o los que viven en distritos que han escogido a la tecnología como su prioridad presupuestaria, deberían tener acceso a la tecnología y a las herramientas, en vista de que éstas son suplementos opcionales para el aprendizaje matemático.	Todos los educandos deberían tener acceso a la tecnología y a otras herramientas que respalden la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
Es fácil utilizar la tecnología y otras herramientas para la enseñanza. Sólo se requiere iniciar una aplicación, conectarse a un sitio web o utilizar los materiales manipulables y dejar que los estudiantes trabajen por su cuenta.	El uso eficaz de la tecnología y de otras herramientas requiere una planificación cuidadosa. Los docentes necesitan un desarrollo profesional adecuado para aprender a utilizarlas con eficacia.
Los videos de enseñanza en línea pueden sustituir a la enseñanza en el salón de clases.	Los videos de enseñanza en línea deben adoptarse con mucha prudencia y emplearse para apoyar, pero no para sustituir, una enseñanza eficaz.

Superación de los obstáculos

Los materiales manipulables, físicos o virtuales, así como otros modelos concretos, pueden ayudar a los alumnos a visualizar las relaciones matemáticas (Roschelle *et al.* 2010). La investigación señala que dos terceras partes de los estudiantes de enseñanza de nivel medio superior todavía funcionan con un nivel concreto de pensamiento (Orlich 2000). Por lo tanto, los materiales manipulables pueden desempeñar un papel importante para una amplia variedad de educandos: desde ayudar a los alumnos más jóvenes a visualizar multiplicaciones con números de varios dígitos mediante el uso de bloques decimales, hasta permitir que los estudiantes de grados avanzados den sentido a la operación de completar cuadrados mediante mosaicos algebraicos.

Las herramientas matemáticas y la tecnología pueden ser útiles conforme los estudiantes trabajen en la resolución de problemas matemáticos desafiantes y además pueden mejorar la comunicación de aspectos matemáticos entre ellos.

Uso de las herramientas y la tecnología por parte de todos los estudiantes

La tecnología es una parte inherente de la vida de los estudiantes. Muchos de ellos utilizan teléfonos inteligentes para interactuar de modo constante con sus compañeros a través de las redes sociales, así que esperan tener acceso instantáneo a la información que necesitan. La tecnología es una parte integral de casi todas las profesiones que tal vez elijan seguir cuando sean adultos. Las clases de matemáticas deben reflejar esta realidad, incorporando la tecnología como un elemento integral de la enseñanza.

A pesar de la creencia popular, el uso de la tecnología no inhibe el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. La idea de que sí lo frena sigue siendo particularmente frecuente respecto del empleo de las calculadoras. No obstante, después de llevar a cabo una revisión exhaustiva de la literatura, Ronau y otros (2011, p.1) concluyen lo siguiente:

> En general, descubrimos que el material de investigación muestra de manera consistente que el uso de las calculadoras en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no contribuye a tener ningunos resultados negativos en cuanto al desarrollo de habilidades o del dominio procedimental; más bien, mejora la comprensión de los conceptos matemáticos, así como la orientación hacia las matemáticas de los estudiantes.

Como el *NCTM* (2011) lo afirma mediante un enunciado que establece su posición, los estudiantes deberían contar con "un acceso regular a las tecnologías que respalden y hagan progresar el razonamiento, la capacidad de dar sentido y de resolver problemas, así como la comunicación". Sin embargo, negarles o limitarles el acceso a la tecnología en determinados momentos a fin de que alcancen las metas relacionadas con la destreza quizá resulte apropiado o incluso necesario.

Tecnologías de matemáticas dinámicas

"Las tecnologías de matemáticas dinámicas" (Dick y Hollebrands 2011) brindan oportunidades para que los alumnos interactúen con las ideas matemáticas. Así, tal vez interactúen con una representación en pantalla de un objeto manipulable a fin de explorar relaciones matemáticas. Quizá empleen un programa para crear representaciones de un conjunto grande de datos para investigar relaciones y sacar conclusiones. O acaso puedan efectuar una serie de cálculos relacionados, que llevaría mucho tiempo realizarlos a mano, con el objeto de buscar patrones en los resultados. La habilidad para moverse entre diferentes representaciones de un problema (es decir, visual/gráfica, simbólica, numérica) puede ser útil a los educandos para que desarrollen una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Incluso, la investigación señala que el efecto de trabajar con materiales virtuales manipulables en una pantalla de computadora es equivalente a utilizar materiales físicos (Sarama y Clemens 2009). Las interfaces multitáctiles posiblemente hagan que las interacciones con las representaciones en la computadora sean más naturales tanto para los alumnos más jóvenes como para los mayores.

No obstante, los docentes deben reconocer que si se aprovecha al máximo el poder de las herramientas y de la tecnología puede mejorar eficazmente la enseñanza. Necesitan



ayudar a sus alumnos a vincular sus observaciones, producto de la investigación, con la comprensión de las matemáticas que están detrás de la situación. Los estudiantes y los docentes han de estar conscientes tanto del poder como de las limitaciones de las herramientas y de la tecnología, reconociendo la necesidad de asegurar que las respuestas sean tanto razonables como aplicables al contexto en el que la manipulación o los cálculos se lleven a cabo. A final de cuentas, las herramientas y la tecnología no son más que el medio y no el fin; no pueden suplantar la comprensión del estudiante ni unos niveles razonables de dominio en el cálculo de operaciones (*NCTM* 2000).

Los docentes necesitan reconocer que la tecnología de matemáticas dinámicas influye no sólo en *cómo* enseñan, sino también en lo *que* son capaces de enseñar. Por ejemplo, puede utilizarse una aplicación gráfica de un dispositivo móvil para analizar las gráficas de una serie de funciones lineales como $y = 2x - 5$, $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 7$. Se les puede pedir a alumnos que determinen lo que las rectas tienen en común, la forma en que difieren y la manera que repercute en sus gráficas la variación de valores específicos de las ecuaciones. Al utilizar un deslizador interactivo, los educandos pueden cambiar los coeficientes y las constantes, viendo de inmediato los efectos de esos cambios en las gráficas. Al hacerlo, pueden razonar que el coeficiente de la variable x determina la pendiente (cuando los coeficientes son equivalentes en las funciones, las rectas se vuelven paralelas), en tanto que la constante determina la intersección con el eje y. Después, el profesor puede basarse en esta conclusión para desafiar a los estudiantes a que grafiquen un conjunto de ecuaciones lineales en su cuaderno, sin que utilicen una tabla de valores. Así, en vez de permitir que los alumnos comiencen a trabajar con lápiz y papel –postergando el uso de la tecnología hasta después de que dominen la habilidad– el maestro puede utilizar la aplicación para graficar, con el objeto de desarrollar su comprensión conceptual sobre los efectos de cambiar los parámetros de las funciones lineales. Los métodos tradicionales del uso de lápiz y papel para hacer gráficas no necesitan practicarse con antelación al empleo de la tecnología.

Políticas y desarrollo profesional

Sin un desarrollo profesional bien diseñado, los docentes pudieran sentirse inseguros respecto del empleo de las herramientas y la tecnología en sus clases. Sin embargo, una vez que comprenden el papel que éstas desempeñan como apoyo para el razonamiento de los estudiantes y su capacidad de dar sentido, los profesores llegan a percibir que aquéllas les dan la oportunidad de plantear preguntas más desafiantes que se enfocan en la investigación y la comprensión.

Se requiere contar con un desarrollo profesional significativo que se centre en los usos matemáticos específicos de las herramientas y la tecnología para que éstas tengan un empleo eficaz en el salón de clases. El hecho de ofrecer talleres genéricos sobre la utilización del pizarrón interactivo o sobre presentaciones electrónicas tal vez no ayude a que los maestros hagan las conexiones necesarias entre las herramientas y la tecnología y las *Prácticas de la enseñanza matemática*. Necesitan desarrollar una profunda comprensión de la manera en que la tecnología y las herramientas pueden emplearse para investigar las ideas matemáticas, generar múltiples representaciones de un constructo matemático y resolver problemas de matemáticas. Necesitan también reflejar el modo en que los alumnos pudieran utilizar esas herramientas y cómo podrían incorporarse al currículo de un modo significativo.

El desarrollo profesional eficaz también debería centrarse en el mejoramiento de las habilidades de los docentes en cuanto al uso de la tecnología, con el objeto de que colaboren con sus colegas de una manera local y global, así como para comunicarse con los padres y tutores. Es más, los profesores requieren explorar formas innovadoras en las que puedan lograr que los estudiantes empleen la tecnología para describir su pensamiento matemático y colaborar con sus compañeros. En vista del acelerado ritmo de la innovación tecnológica, los profesores requieren buscar continuamente formas en las que la tecnología pueda respaldar el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

Las políticas y prácticas deben apoyar el uso eficaz de las herramientas matemáticas y de la tecnología a lo largo de todo el programa de la asignatura. La utilización adecuada de tales herramientas debería incorporarse a los estándares estatales o provinciales, así como a los locales y al marco teórico curricular; asimismo, las evaluaciones no sólo habrán de permitir sino exigir el uso de la tecnología. La selección de textos y de materiales educativos deberá tener en cuenta si tales recursos incorporan herramientas matemáticas y tecnología de tal manera que respalden la destreza de los estudiantes en las prácticas matemáticas, así como la implementación por parte de los docentes de las *Prácticas de enseñanza matemática.*

Ejemplo

La figura 25 muestra la forma en que la profesora Linares, de octavo grado, involucra a sus estudiantes en un contexto verdadero relacionado con el béisbol, a la vez que hace un empleo eficiente de una variedad de herramientas y tecnologías con el objeto de desarrollar su comprensión y habilidad para escribir ecuaciones y resolver sistemas de ecuaciones. Al utilizar fichas de colores, computadoras portátiles, calculadoras graficadoras, tabletas y lectores de documentos a fin de mostrar sus estrategias, los estudiantes son capaces de abordar un problema de distintas maneras y obtener la solución con las herramientas que les permiten dar más sentido.

La maestra Linares, de octavo grado, les pidió a sus alumnos que trabajen en los conceptos de escribir ecuaciones y encontrar la solución a un sistema de ecuaciones al analizar el problema de béisbol, ya que los juegos de la serie mundial de las Ligas pequeñas se están transmitiendo por televisión. El problema permite que se aborde con una gama de herramientas matemáticas, tanto físicas como tecnológicas:

En el mes de abril, en un juego de béisbol un bateador tomó su turno y la pizarra mostró que su promedio de bateo era de .132. Después de dos lanzamientos, conectó un imparable al jardín central y de inmediato la pizarra actualizó su porcentaje a .154. Dada esta información, determina cuántos turnos al bat tenía hasta ese momento en la temporada y cuántos imparables había conectado.

Reunidos en equipos, los alumnos comenzaron a explorar el problema. A fin de visualizarlo, un estudiante de un equipo tomó de la mesa un puñado de fichas de dos colores y escogió dos de ellas: una roja y una amarilla; luego dijo: “La roja significa un imparable. Si el jugador bateó dos veces y una ficha es roja, tiene un promedio de bateo igual a ½ o 0.5”. Colocó otra ficha roja en la mesa, observando que el bateador ahora había incrementado su promedio de 0.5 a 0.667, “ya que dos de tres fichas son ahora rojas”. Continuó añadiendo fichas rojas, comparando los números resultantes de las fichas rojas con el total de fichas de la mesa.

Los estudiantes de todo el salón de clases continuaron con su estrategia de adivinar y verificar a fin de reducir sus opciones y llegar a una solución. Sin embargo, un equipo decide que la utilización de una hoja de cálculo podría acelerar las cosas, permitiéndoles dar seguimiento con mayor facilidad a sus conjeturas. “Colocan” su

fórmula, como se muestra abajo (a), observando las diferencias entre las filas. Con un poco de orientación de su profesor, deciden que necesitan una tabla electrónica distinta, como se muestra en (b). Esta tabla calcula el número de imparables para cierto número de turnos al bat y después calcula el promedio para un imparable adicional teniendo un turno más al bat. Al examinar que sus datos para 40 turnos (con 5.28 imparables) muestran un porcentaje que está cercano a 0.132, utilizan números cercanos a 40 turnos al bat. Un estudiante observa que "al parecer 38 o 39 están en verdad muy cerca, pero no estamos seguros cómo decidir qué número es".

	A	B	C
1	Imparables	Total	Promedio
2	5	38	0.132
3	6	39	0.15384615
4	7	40	0.175
5	8	41	0.19512195
6	9	42	0.21428571
7	10	43	0.23255814

(a)

	A	B	C	D	E	F
1	Imparables	Total	Promedio	Imparables+1	Total+1	Promedio
2	1.32	10	0.132	2.32	11	0.21090909
3	2.64	20	0.132	3.64	21	0.17333333
4	3.96	30	0.132	4.96	31	0.16
5	5.28	40	0.132	6.28	41	0.15317073
6	6.6	50	0.132	7.6	51	0.14901961
7	7.92	60	0.132	8.92	61	0.14622951

(b)

En otro equipo, los estudiantes que están empleando la estrategia de adivinar y verificar se dan cuenta de un modelo repetitivo para sus cálculos: en cada ocasión comienzan con un número de imparables y de turnos al bat, calculan el porcentaje de bateo, les suman 1 a las dos primeras cantidades y luego calculan el nuevo porcentaje. Uno de los alumnos sugiere que traten de utilizar un enfoque algebraico para el problema. El equipo está de acuerdo en la siguiente solución, misma que después la explica un miembro del equipo a la clase:

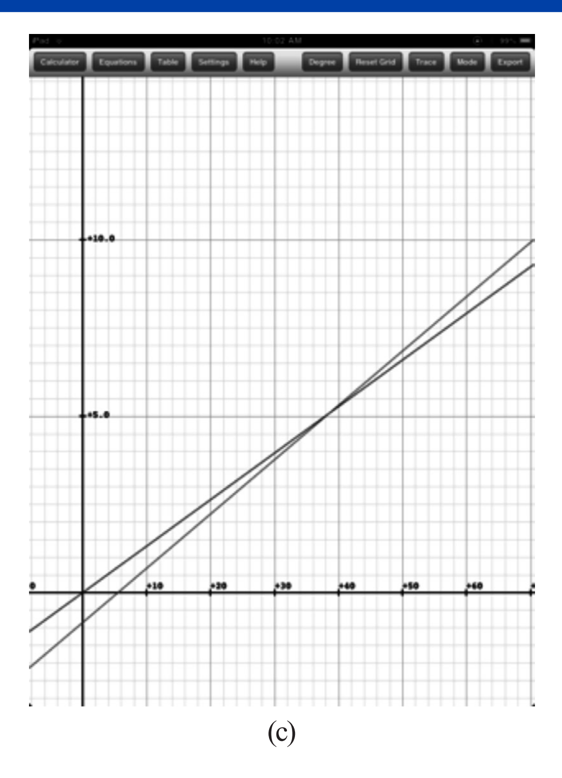
Si x representa el número de veces que un jugador batea y y significa el número de imparables, entonces $\frac{y}{x}$ determinaría el promedio de bateo. Así que cuando un bateador conecta un hit en su turno, su nuevo promedio podría representarse como:

$$\frac{y+1}{x+1}$$

Esto nos permite escribir dos diferentes ecuaciones: una que representa el promedio de bateo original y la otra que significa su promedio después de que conecta un imparable en su siguiente turno al bat:

$$\frac{y}{x} = 0.132 \text{ y } \frac{y+1}{x+1} = 0.154$$

Decidimos que podíamos encontrar la solución si utilizábamos una aplicación gráfica de nuestra tableta para ver dónde se intersecan las dos rectas. Pero primero tuvimos que resolverlas para y con el objeto de graficarlas. Aquí está la gráfica que obtuvimos (c). También pensamos que la respuesta debería estar entre 38 y 39. Cuando hicimos un acercamiento, decidimos que 38 estaba más cerca.



(c)

Otro equipo adoptó un enfoque similar, pero utilizó la función para hacer tablas de la calculadora graficadora; un estudiante de ese equipo hizo notar: "estuvimos de acuerdo en que 38 parecía ser la mejor respuesta para el número de turnos al bat. Pero estábamos confundidos porque nuestra tabla no mostraba la respuesta exacta, ¿cómo puedes batear 5.016 imparables?

La maestra Linares conduce entonces el análisis sobre el redondeo y la exactitud y se asegura que los estudiantes puedan interpretar el significado de x, $x + 1$, y y $y + 1$ en el contexto del problema. También plantea una pregunta: "¿Alguno de ustedes trabajó sin usar calculadora o tableta? Tómense un minuto para ver cómo abordarían el problema."

La mayoría de los equipos coincidieron en que la sustitución podría ser la estrategia más sencilla, aunque algunos sustituyeron $0.132x$ por y en la ecuación

$$\frac{y+1}{x+1} = 0.154,$$

mientras que otros simplemente igualaron las dos expresiones que encontraron, despejando y para introducirlas en su calculadora o computadora.

Al final, un alumno preguntó: "¿Podría haber una respuesta distinta para esta pregunta? ¿No es posible que otro bateador obtuviera 10 de 76, en vez de 5 de 38? Y puesto que 10/76 es equivalente a 5/38, entonces no podemos saber realmente cuántos turnos al bat tuvo". Otro estudiante refutó con rapidez esta posibilidad, pues 11/75 no es igual a 0.154. Y otro más comentó: "En la gráfica, tuvimos dos rectas, pero sabemos que sólo se pueden intersecar en un único punto".

Fig. 25 Forma en que una profesora de octavo grado se vale de la tecnología para desarrollar la comprensión y las habilidades matemáticas.

Manos a la obra

El ritmo vertiginoso al que la tecnología está evolucionando exige que se vuelvan a examinar las prioridades de los programas eficaces de matemáticas. Los estudiantes están creciendo con tecnologías avanzadas (desde dispositivos móviles hasta aplicaciones basadas en la Web), por lo que resulta esencial que a los docentes se les ofrezca el desarrollo profesional necesario para ir a la par con los cambios. Los maestros debieran sondear continuamente las herramientas matemáticas y las tecnologías con el objeto de evaluar el potencial que tienen para abrir el horizonte matemático de los educandos y para buscar nuevas formas con las que la tecnología pudiera cambiar la manera en que ellos utilicen las matemáticas en la universidad y en su profesión. En vista de la rauda facilidad con que la tecnología puede utilizarse para llevar a cabo casi cualquier procedimiento matemático que se les pueda pedir a los estudiantes que efectúen, los profesores de matemáticas quizá se vean obligados a reconsiderar el equilibrio entre el conocimiento procedimental y el conceptual que se exige para el dominio de las matemáticas. Los administradores y los responsables de las políticas necesitan seguir haciendo énfasis en la importancia que tiene desarrollar un aprendizaje significativo de las matemáticas, al mismo tiempo que reconozcan que los programas eficaces de matemáticas reflejan el creciente poder que las herramientas y la tecnología ostentan para transformar la manera en que las matemáticas se utilizan para resolver problemas del mundo real.

Evaluación

Un programa de matemáticas de excelencia garantiza que la evaluación sea una parte integral de la enseñanza, ofrece evidencias del dominio del contenido matemático importante y de las prácticas matemáticas relevantes, incluye una variedad de estrategias y de fuentes documentales y moldea la retroalimentación a los estudiantes, las decisiones de enseñanza y el mejoramiento del programa.

Cuando se les pide una definición de *evaluación*, muchos docentes piensan en pruebas cortas y exámenes, así como en las medidas del logro estudiantil distritales, estatales o provinciales, y nacionales. Empero, las necesidades de evaluación deben concebirse de una manera mucho más amplia. En los *Estándares de evaluación para la educación matemática* (1995), el *NCTM* definió a la evaluación como “el proceso tanto de recopilar evidencia respecto del conocimiento del estudiante, de la habilidad para usar las matemáticas y de su disposición hacia la disciplina, como de hacer inferencias a partir de tal evidencia para una variedad de propósitos” (p. 3). Al mismo tiempo, el *NCTM* afirmó que la evaluación debería tener cuatro funciones distintas en las matemáticas escolares:

- *Supervisar el progreso de los estudiantes* para fomentar su aprendizaje
- *Tomar decisiones respecto de la enseñanza* para modificarla, con el objeto de facilitar el aprendizaje del alumno
- *Evaluar el logro de los estudiantes* a fin de resumir y reportar la comprensión demostrada por ellos, en un momento particular
- *Evaluar los programas* para tomar decisiones concernientes con los programas de enseñanza

Incluso, en el documento *Principios y estándares para la educación matemática* (2000), el *NCTM* aseveró que la evaluación debería "apoyar el aprendizaje de las matemáticas fundamentales y suministrar información útil tanto a los docentes como a los estudiantes" (p. 22). De acuerdo con Wiliam (2011 p. 43), "una evaluación funciona de manera formativa en la medida en que los docentes, aprendices o sus colegas deduzcan, interpreten y utilicen la evidencia sobre el logro del estudiante, con el fin de tomar decisiones sobre los próximos pasos a seguir en la enseñanza, que probablemente sean mejores decisiones que las que hubiesen tomado en ausencia de tal evidencia". Por tanto, en el contexto de la enseñanza matemática eficaz, la evaluación es un proceso cuyo propósito principal es recopilar datos que refuercen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Obstáculos

Aunque la evaluación debiera apoyar el aprendizaje del estudiante, en las escuelas a menudo funciona como un obstáculo para alentar el éxito de todos los alumnos con las matemáticas. La razón de lo anterior es que tradicionalmente aquella tiende a subrayar la evaluación del logro del estudiante (es decir, la asignación de calificaciones), y en fechas recientes la clasificación de las escuelas y el desempeño de los docentes. Desde el comienzo de la escolarización, la percepción cultural que vincula la evaluación con calificaciones y con clasificaciones ha dominado el pensamiento en Estados Unidos, pero ha tenido más auge en la última década, conforme las escuelas y los sistemas utilizan en mayor medida evaluaciones más exigentes para medir la eficacia de los docentes, las escuelas y los administradores. Una de las consecuencias de enfocar la evaluación en la responsabilidad ha sido la innecesaria politización de aquélla. En aras de la responsabilidad, se ha relegado el enorme potencial de utilizar el proceso de evaluación para fortalecer el aprendizaje del estudiante y mejorar la enseñanza.

La evaluación suele percibirse y practicarse como un acontecimiento periódico impuesto desde el exterior (por ejemplo, las pruebas estatales o provinciales, las pruebas trimestrales de distrito) o como una actividad que interrumpe la enseñanza, llevada a cabo por un docente particular; en ambos casos se considera que la evaluación "se aplica" a los estudiantes. Las evaluaciones sumativas elaboradas de manera externa suelen ser poco más que encuestas de opción múltiple de un gran conjunto de habilidades procedimentales de bajo nivel, que no evalúan las habilidades de comprensión matemática ni de resolución de problemas (Herman y Linn 2013). Por lo tanto, los resultados de una evaluación externa a menudo no proveen ni a los docentes ni a los alumnos la retroalimentación oportuna, descriptiva y exacta que los profesores requieren para mejorar la enseñanza y hacer progresos en el aprendizaje (Reeves 2011).

Es más, con mucha frecuencia los resultados obtenidos en una sola prueba de alto nivel tienen una enorme influencia en las valoraciones importantes sobre los estudiantes (como su ubicación en los cursos) y sobre los docentes (como su trabajo futuro o su salario basado en su desempeño). Esta forma de decidir deja de lado la variabilidad que puede ocurrir como resultado de muchos factores que afectan el desempeño del estudiante en pruebas de ese tipo. El diseño de la prueba mismo puede ser un factor de suma importancia. La discriminación constituye un principio psicométrico de primera magnitud para el diseño de pruebas; es decir, los "buenos" reactivos son aquellos que propician diferencias en el desempeño (Haladyna y Downing 1989). En aras de la discriminación, las pruebas quizá



contengan reactivos que subestiman el conocimiento real de los estudiantes. Por ejemplo, considere el reactivo de la figura 26.

En el festival de la escuela, Carmen vendió el triple de hamburguesas que Santiago. Entre ambos vendieron 152 hamburguesas. ¿Cuántas vendió Carmen?

(a) 21 (b) 38 (c) 51 (d) 114 (e) 148

Fig. 26. Reactivo de una prueba estandarizada de álgebra.

La respuesta más común que dan los alumnos es (b), que es el resultado intermedio (el número de hamburguesas que vendió Santiago), en vez de la respuesta correcta (d), las hamburguesas que Carmen vendió. Por desgracia, incluso los estudiantes que eligieron la opción (b), efectuaron de manera correcta la mayor parte de los procedimientos que la tarea exige; esta comprensión no se refleja en las calificaciones.

Los resultados de las evaluaciones estandarizadas y de las del salón de clase (elaboradas por los docentes o compradas a un editor) no siempre se analizan como se debe ni se utilizan para mejorar la enseñanza. Se deja pasar una importante oportunidad de aprendizaje cuando un distrito escolar simplemente ingresa las calificaciones de las pruebas estandarizadas en su base de datos, en vez de apoyar a los docentes a través de estructuras formales para que se analicen las implicaciones de las fortalezas y debilidades medidas del programa de matemáticas.

Por otra parte, los resultados de las pruebas estandarizadas pueden mal interpretarse y analizarse en exceso. Por ejemplo, los docentes y administradores suelen enfocarse simplemente en los incrementos y decrementos de las calificaciones de las pruebas, ignorando si tales variaciones son estadísticamente significativas. Incluso los profesores tienden a hacer suposiciones respecto del conocimiento de los estudiantes, sin tener en cuenta los reactivos específicos de las pruebas ni la validez de la información que esos reactivos brindan concerniente con el conocimiento. Por ejemplo, una de tales suposiciones consiste en que los alumnos que contestaron incorrectamente el reactivo de las hamburguesas no han entendido en absoluto las matemáticas subyacentes.

Por último, algunos maestros piensan que las evaluaciones son análogas a tener una calificación, pero quizá no se percaten del valor de recopilar datos sobre el pensamiento y la comprensión de los estudiantes, datos que tal vez no de traduzcan fácilmente a una boleta de calificaciones de primaria o a una nota en un curso de secundaria. A pesar de que las pruebas cortas y exámenes tradicionales puedan arrojar cierta luz sobre el progreso de los alumnos, otras fuentes de información abundantes —desde entrevistas aleatorias a los alumnos hasta observaciones, papeletas de salida[4] y reflexiones escritas en los cuadernos[5]— puedan también dar cuenta a los maestros del entendimiento de los alumnos y sugerir modificaciones en la enseñanza. Durante décadas, el hecho de considerar que las

4 En inglés, *daily exit splits*. En Estados Unidos es un recurso pedagógico que utilizan los docentes y que consiste en una hoja donde el alumno escribe brevemente lo que aprendió en la clase de ese día y que se entrega al maestro al final de la jornada.

5 En inglés *journal writing*. Otro recurso pedagógico que se refiere a las reflexiones que escriben en sus cuadernos los estudiantes.

evaluaciones se restringen a "probar" el aprendizaje de los estudiantes, en vez de considerarlas como un proceso que puede mejorar, ha sido un obstáculo para el uso eficaz de los procesos de evaluación.

La siguiente tabla compara algunas creencias improductivas y productivas que influyen en las prácticas de evaluación. Resulta importante notar que éstas no deben considerarse como buenas o malas, sino más bien como productivas cuando respaldan la enseñanza y el aprendizaje eficaces o improductivas cuando limitan el acceso a los estudiantes a contenidos y prácticas matemáticas importantes.

Creencias sobre la evaluación matemática	
Creencias improductivas	**Creencias productivas**
El propósito principal de la evaluación consiste en responsabilizar a los estudiantes mediante calificaciones o una boleta.	El objetivo principal de la evaluación es tanto dar informes sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como mejorarlos.
La evaluación en el salón representa una interrupción del proceso de enseñanza.	La evaluación es un proceso en curso que está incrustado en la enseñanza, con el objeto de apoyar el aprendizaje de los alumnos y realizar ajustes a la enseñanza.
Sólo las pruebas de opción múltiple, así como otras pruebas "objetivas" hechas con lápiz y papel, pueden medir el conocimiento matemático de una forma confiable y precisa.	Los procesos y la comprensión matemáticos pueden medirse mediante el empleo de una variedad de estrategias de evaluación y tareas.
Puede utilizarse una sola evaluación para tomar decisiones importantes concernientes con los docentes y estudiantes.	Se requieren fuentes documentales variadas para obtener una imagen exacta del desempeño del profesor y el alumno.
La evaluación es algo a lo que se someten los estudiantes.	La evaluación es un proceso que debiera ayudar a los alumnos a ser mejores jueces de su propio trabajo, auxiliarlos en reconocer un trabajo de alta calidad cuando ellos lo hacen y a respaldarlos en usar la evidencia para progresar en su propio aprendizaje.
Detener la enseñanza para revisar y hacer pruebas de práctica mejora el desempeño de los estudiantes en pruebas rigurosas.	La progresiva revisión y la práctica distribuida dentro de la enseñanza eficaz son estrategias productivas de preparación para las pruebas.

Superación de los obstáculos

La evaluación eficaz respalda y perfecciona el aprendizaje de las matemáticas trascendentales al proveer información útil, formativa y sumativa a los docentes y estudiantes. La evaluación eficaz del aprendizaje matemático es un proceso que se ajusta coherentemente con las metas de aprendizaje, hace un uso deliberado de la recopilación de datos como evidencia de aprendizaje y ofrece una guía para dar los siguientes pasos en la enseñanza y

en la toma de decisiones sobre los programas. En los programas matemáticos de excelencia los alumnos aprenden a evaluar y reconocer la alta calidad en sus propios trabajos.

Evaluación de la comprensión conceptual, el razonamiento y el dominio procedimental

La evaluación externa y en el salón de clases ofrece evidencia sobre todos los componentes del aprendizaje matemático de los alumnos. La evidencia obtenida depende de las preguntas y tareas empleadas. De modo más específico, para obtener evidencia concerniente con la comprensión y el razonamiento se requiere utilizar tareas y métodos diseñados para tales propósitos. Por ejemplo, para evaluar la comprensión de un concepto por parte del estudiante, uno pudiera pedirle que se lo explique a otra persona, lo exprese en diversas formas, aplique su conocimiento de habilidades para resolver problemas simples y complejos, intercambie los hechos conocidos y desconocidos en un problema contextual o compare y contraste un concepto matemático con otros (*National Center on Education and the Economy* y *University of Pittsburgh* 1997).

Considere la tarea sobre la venta de televisores que se muestra en la figura 27. La parte A ofrece evidencia sobre la habilidad del alumno para dar sentido a un problema contextual y sobre las habilidades para aplicar procedimientos al trabajar con porcentajes a fin de determinar una solución. La parte B pide al educando que evalúe si el razonamiento bajo dos distintos enfoques es equivalente y que explique su pensamiento.

Séptimo grado: venta de televisiones

Una tienda anuncia una venta con rebajas del 10% en todos sus artículos. El impuesto sobre ventas es del 5%.



Parte A

El precio regular de una televisión de 32 pulgadas es de $2 950. ¿Cuál es su precio total, incluyendo impuestos, si se compró en la rebaja? Completa la oración en el espacio en blanco. Redondea tu respuesta a la unidad más cercana.
El costo total de la televisión es de $ ______________ .

Parte B

Adán y Brenda son clientes y están analizando cómo se debe calcular el descuento y el impuesto.

Aquí está el procedimiento de Adán para saber el costo total de cualquier artículo de la tienda.

- Resto el 10% del precio original.
- Luego añado el impuesto de venta sobre el precio con descuento.

Adán representa su proceso así:

$$T = \underbrace{0.9p}_{\text{precio de venta}} + \underbrace{0.05(0.9p)}_{\text{Impuesto sobre la venta}}$$

He aquí el procedimiento de Brenda para calcular el precio total para cualquier artículo de la tienda.

- Determino el precio original del artículo, incluyendo el impuesto sobre venta.
- Luego le resto el 10%.

Brenda representa su proceso así:

$$T = \underbrace{1.05p}_{\text{precio de venta de la T.V. más impuestos}} + \underbrace{0.10(1.05p)}_{\text{10\% de descuento}}$$

En ambas ecuaciones *T* representa el costo total de la televisión y *p* el precio regular.

¿Ambas son correctas? Utiliza las propiedades de las operaciones para justificar tu respuesta.

Fig. 27. Tarea de la compra de la T.V. Tomado de *PARCC* (2013).

Las preguntas puntuales o las sugerencias de redacción, como las siguientes, pueden utilizarse para evaluar la comprensión conceptual y el razonamiento de los estudiantes:

- Crea una situación de la que 6 ÷ ¾ pudiera ser el modelo.
- Escribe tres ecuaciones, una que no tenga solución, otra que sólo tenga una solución y otra con un número infinito de soluciones.
- ¿Es 12 ÷ 3 igual a 3 ÷ 12? Explica tu respuesta.

Los docentes pueden dar estas sugerencias de redacción antes de presentar un nuevo tema matemático para determinar los conocimientos previos de los estudiantes. A la vez, los datos de la evaluación quizá influyan en el diseño de una secuencia completa de lecciones dentro de la unidad. Una pregunta clave que los docentes habrán de considerar al crear o seleccionar las tareas de evaluación y los reactivos es: ¿qué evidencia proporcionará concerniente con el conocimiento matemático de los alumnos?

Reforzamiento de los resultados de la evaluación formativa

Las evaluaciones en matemáticas pueden organizarse en dos categorías, en función del modo en que sus resultados se utilicen: formativas y sumativas. A fin de lograr el triple propósito de motivación, apoyo y mejoramiento para el aprendizaje y la enseñanza de los estudiantes, los docentes pueden concebir y practicar la evaluación a nivel de grupo fundamentalmente como un proceso formativo: una recopilación de datos en tiempo real, continua y en proceso, conforme los alumnos participan en la enseñanza de las matemáticas en el salón de clases. Los profesores dan un seguimiento continuo y responden al progreso de los educandos a través de medios formales e informales, los cuales incluyen, aunque no son los únicos, plantear eficazmente preguntas y realizar un análisis en el salón de clases, llevar a cabo de manera individual entrevistas con los estudiantes, que éstos den respuestas a los retos de revistas matemáticas, que respondan a las preguntas planteadas en tiempo real a través de sus tabletas interactivas de respuestas o de sus dispositivos móviles, o que respondan a retos matemáticos mediante sus papeletas de salida. Con esta labor, los docentes *deducen y utilizan la evidencia del pensamiento del estudiante* tal y como lo recomiendan las *Prácticas de enseñanza matemática*. El análisis anterior de esta práctica brinda una guía adicional para la implementación del proceso de evaluación formativa en curso durante el aprendizaje.

Las investigaciones indican que la estructuración de procesos de evaluación formativos como un componente integral de la enseñanza, está asociada con el mejoramiento del aprendizaje del estudiante (Black y Wiliam 1998b; Hattie, 2009, 2012; Popham 2008). De hecho, la investigación sobre la eficiencia de los procesos de evaluación formativa para el progreso del estudiante cumple la definición estricta del *National Mathematics Advisory Panel* [Consejo Nacional de Consultoría en Matemáticas] (*NMAP* 2008) concerniente con

la "investigación basada en la ciencia", dando como resultado que el Consejo se percatara de que "el uso regular de la evaluación formativa por parte de los docentes mejora el aprendizaje de los estudiantes" y que recomendara que los profesores "llevaran a cabo un uso regular de la evaluación formativa" con el objeto de mejorar el logro en matemáticas (p. xxiii).

Lo que a final de cuentas caracteriza a los procesos de evaluación como formativos o sumativos es la manera en que se utilizan los resultados. La definición característica de la evaluación formativa "es que la evidencia sobre el aprendizaje del estudiante se usa para hacer ajustes en la enseñanza con el objeto de cumplir de la mejor manera las necesidades del estudiante" (Wiliam 2007b, p. 191). De acuerdo con esta definición, incluso las evaluaciones tradicionales efectuadas en el salón de clases que suelen emplearse sólo en formas sumativas –incluyendo las pruebas de capítulo o de unidad elaboradas por los docentes o por un editor y que se utilizan sobre todo para asignar calificaciones– pueden reorientarse de un modo formativo para modificar y guiar la enseñanza a fin de cumplir con las necesidades de aprendizaje de los alumnos.

La evaluación sirve como un medio para lograr una enseñanza y un aprendizaje eficaces para todos, cuando se concibe como un proceso que es inseparable de la enseñanza eficaz, en vez de considerarla solamente como la etapa final del tradicional ciclo de evaluación de la enseñanza y el aprendizaje. Es más, cuando los docentes hacen un mayor énfasis en los procesos de evaluación formativa, su utilización del tiempo de enseñanza deviene más eficaz (*NMAP* 2008), y esto a su vez quizá conduzca a una reducción del tiempo que necesitan invertir en la preparación de los alumnos para las evaluaciones estatales, provinciales o nacionales. No se debe considerar que son mutuamente excluyentes el uso de prácticas de enseñanza eficaces y alcanzar el éxito en evaluaciones de responsabilidad (Martin *et al*. 2011).

De hecho, la investigación asevera que las calificaciones en pruebas estandarizadas son menores en las escuelas donde los docentes invierten una enorme cantidad de tiempo en actividades de "preparación para los exámenes", practicando con preguntas de examen y deteniendo simultáneamente el proceso normal de enseñanza, en comparación con las escuelas donde los profesores siguen con el proceso normal de enseñanza (véase por ejemplo, Allensworth, Correa y Ponisciak 2008). Ofrecer a los alumnos oportunidades periódicas para practicar mediante el empleo de conceptos y habilidades, a la par que dar una retroalimentación de su desempeño, les ayuda a reafirmar su conocimiento y fomenta su retención, reflexión, generalización y trasferencia del conocimiento y de la destreza (Pashler *et al*. 2007). En resumen, se puede argumentar que la enseñanza eficaz, incluyendo la evaluación formativa, es la estrategia más acertada para la preparación de exámenes.

Un enfoque sobre los estudiantes

El estudiante está en el centro del proceso de evaluación. Un propósito fundamental de la evaluación debería ser el convertir a los estudiantes en autoevaluadores eficaces, enseñándoles el modo de reconocer las fuerzas y debilidades de su desempeño anterior y a usarlos para perfeccionar su trabajo futuro. A los alumnos se les deberían suministrar ejemplos de trabajos de alta calidad y después darles retroalimentación, de manera que pudieran trabajar en el progreso de su propio aprendizaje y ayudarlos a alcanzar sus metas. Las

evaluaciones hechas por sus compañeros pueden permitirles, en una forma útil, comparar su trabajo críticamente con el de los demás. A la larga, deberían ser capaces de reconocer un trabajo de alta calidad cuando ellos lo generen. Cuando los educandos asumen las responsabilidades de la evaluación de esta forma, entonces ellos y los docentes trabajan como socios en el proceso de aprendizaje, dándose consejos los profesores y otros estudiantes sobre cómo ser mejores (Stiggins 2007).

La concepción de la evaluación es muy diferente respecto de la imagen tradicional según la cual se hace al final de una unidad, fundamentalmente para dar una calificación. Resulta obvio y apropiado que la evaluación tenga un papel en la asignación de las calificaciones de la boleta. No obstante, se corre un gran riesgo si se hace excesivamente hincapié en las evaluaciones al final de la unidad, eliminando el proceso de evaluación formativa y no utilizando su poder para hacer progresar el aprendizaje del estudiante. Este empleo mezquino de la evaluación sólo sirve para clasificar a los alumnos y para convencer a los muchos que obtienen baja calificación de que no pueden con las matemáticas y, por consiguiente, frustrando el propósito general de garantizar el éxito en las matemáticas para todos los educandos.

Ejemplo

La evaluación formativa eficaz involucra el uso de tareas que deducen la evidencia del aprendizaje del alumno y después la utiliza para moldear la subsecuente enseñanza. En el ejemplo que sigue, un equipo de trabajo colaborativo formado por docentes de tercer año modificó los reactivos rutinarios de las evaluaciones del final de la unidad, de modo que suministraran información detallada sobre la comprensión de los alumnos respecto de la suma y la resta con números de varios dígitos, y luego usaron esa información en la planificación de la enseñanza:

> En la primaria Florida se ha establecido sólidamente una cultura comunitaria de aprendizaje profesional. Los docentes trabajan mediante equipos colaborativos por grado en la elaboración de evaluaciones comunes por unidad, analizando el desempeño de los estudiantes y determinando las implicaciones que éste tiene para la enseñanza; esto incluye intervenciones que luego se planifican en equipo.
>
> Los tres docentes del equipo de tercer grado se reúnen para analizar el desempeño de los alumnos en una prueba de final de unidad sobre operaciones de cálculo con números de varios dígitos. La unidad apoyaba a los educandos para que avanzaran hacia el siguiente estándar de contenido de la *CCSSM*: “Suman y restan con destreza hasta 1000, utilizando estrategias y algoritmos basados en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre suma y sustracción”. (*CCSSM* 3. *NBT*.2; *NGO Center* y *CCSSO* 2010, p. 24).
>
> Este año, el equipo decidió utilizar una evaluación que dio información sobre las estrategias y el razonamiento de los estudiantes para la resolución de dos problemas de sustracción: 823 – 365 y 408 – 217. La prueba del año anterior contenía problemas de suma y resta de decenas y el dominio del estudiante se definió como un porcentaje de las respuestas correctas. Para este año, la adopción de nuevos estándares impulsó a los docentes a recabar evidencia de la comprensión y de la perspicacia de los alumnos respecto de las estrategias. Por tanto, les pidieron que resolvieran cada problema de dos formas distintas, dando una explicación por escrito de sus estrategias



de solución y empleando la suma para mostrar que sus respuestas eran correctas. El equipo incluyó la verificación a través de la suma, a fin de obtener evidencia de la comprensión de los alumnos de la suma y la sustracción con números con distintos dígitos, mediante su trabajo en los dos problemas de sustracción. La figura 28 muestra la respuesta de un educando a uno de esos problemas.

Los docentes clasificaron las respuestas de los estudiantes con base en las estrategias utilizadas y la comprensión demostrada. En general, estuvieron satisfechos con los resultados, al observar que la mayoría de los alumnos fueron capaces de construir al menos una estrategia confiable y significativa para la suma y la sustracción. A fin de ofrecer apoyo adicional a los estudiantes que aún tenían dificultades, los docentes los asignaron a uno de los tres grupos de asesoría, de acuerdo con el nivel de comprensión del valor posicional que mostraron en sus estrategias. Cada profesor trabajaría con un grupo de asesoría durante los primeros 20 minutos de un bloque de matemáticas de 90 minutos; después los alumnos regresarían a sus clases de matemáticas usuales para la lección del día. Aquellos educandos que no fueron asignados a los grupos de asesoría tuvieron otras labores durante ese lapso.

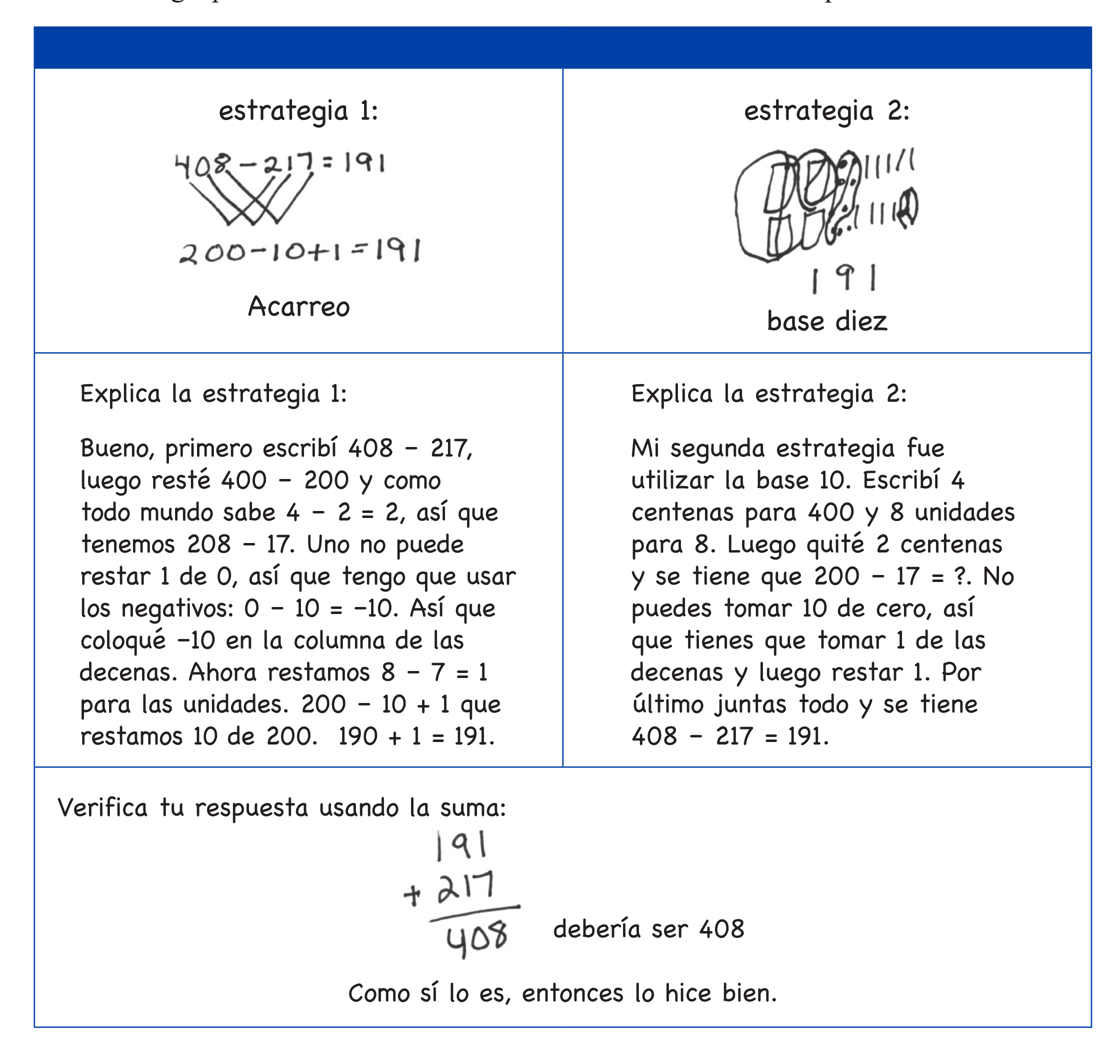


Fig. 28. Trabajo de un alumno de tercer grado en un reactivo de la evaluación de final de unidad.

Por último, los profesores tomaron nota de la gran cantidad de estudiantes que cometieron errores por descuido en la evaluación. Aunque les advirtieron de éstos en la clase y los conminaron a que revisaran su trabajo y corrigieran sus errores, estaban preocupados porque los estudiantes quizá siguieran cometiendo esos errores en la evaluación trimestral de distrito, lo cual daría como resultado una menor cantidad de alumnos que tuvieran una calificación de "suficiente" en la suma y sustracción de números con varios dígitos.

Después de tener unas conversaciones, los docentes se percataron de que a pesar de que les habían dicho a sus alumnos "verifica tu trabajo", en realidad no les habían enseñado *cómo* hacerlo (es decir, verificar para que se dieran cuenta que los números que utilizaron en los cálculos eran los mismos que los dados en el problema). Para resolver esta situación, los profesores planificaron conjuntamente una actividad llamada "Cómo verificas tu trabajo" y decidieron que incorporarían las sugerencias de los alumnos respecto de cómo hacer la verificación. El resultado sería una rutina llamada "verifica tu trabajo" que ayudaría a los alumnos a desempeñar esta labor en forma regular.

Como el ejemplo señala, unas cuantas tareas bien diseñadas pueden brindar mucha más información sobre el aprendizaje de los estudiantes, que una prueba con muchos reactivos. Del mismo modo, las intervenciones que se dirigen a las necesidades de los estudiantes pueden ser más eficaces cuando los maestros del grado o del curso comparten la responsabilidad de las intervenciones para todos los estudiantes. Por último, el análisis de los resultados de la evaluación puede revelar aspectos importantes del aprendizaje que la enseñanza no ha abordado o incluso que no se ha propuesto, como la necesidad de verificar el trabajo de uno mismo con una comprensión total de lo que el proceso involucra.

Manos a la obra

Cambiar el enfoque y la función principales de la evaluación desde la responsabilidad hacia una práctica de enseñanza efectiva constituye un componente básico para garantizar el éxito en las matemáticas para todos los estudiantes. Los docentes frente a grupo, así como los líderes distritales y escolares pueden comenzar de inmediato a implementar unas prácticas de evaluación más eficaces a fin de que se vuelva a considerar la evaluación como un proceso formativo. Los responsables de las políticas pueden trabajar para asegurar que el sistema de evaluación proporcione evidencia sobre la destreza de los alumnos en todo el amplio rango de los resultados matemáticos esperados (las prácticas matemáticas y la comprensión conceptual, así como la destreza procedimental) y para pensar cómo utilizar los resultados del logro de los alumnos de una mejor manera. Es más, apuntalar a la evaluación como una estrategia para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del educando en el salón de clases y en la escuela representa una estrategia de enseñanza muy eficaz en cuanto a los costos, en comparación con otros esfuerzos para el mejoramiento educativo.



Profesionalismo

En un programa de matemáticas de excelencia los docentes y sus colegas se hacen responsables del éxito matemático de cada estudiante, así como de su avance profesional, personal y colectivo, hacia la enseñanza y el aprendizaje eficaces de las matemáticas.

Un profesional no acepta el *status quo*, incluso cuando es razonablemente bueno, así que busca continuamente aprender y crecer (Collins 2001). Un profesional eleva los estándares de la profesión, tanto de manera individual como mediante la crítica a sus colegas; se centra en el aprendizaje del alumno; sabe y lleva a cabo prácticas de campo basadas en la investigación y utiliza el conocimiento y las experiencias acumulados para buscar, en forma individual y colectiva, mejoras en las condiciones y resultados existentes (Wiggins y McTighe 1998).

En el campo de la educación, los profesionales que son responsables por el aprendizaje matemático de los estudiantes nunca están satisfechos con sus logros y siempre están trabajando para incrementar el impacto que tienen sobre el aprendizaje de sus alumnos. Por esta razón, procuran buscar el crecimiento profesional a largo plazo. Como profesionales, los maestros de matemáticas reconocen que su propio aprendizaje nunca termina y buscan siempre mejorar y perfeccionar su conocimiento matemático para la enseñanza, de la pedagogía matemática y su cognición de los estudiantes en cuanto aprendices de matemáticas.

Los maestros de matemáticas son profesionales que no trabajan en forma aislada. Cultivan y fomentan una cultura de mejoramiento profesional continuo y colaborativo, impulsada por un sentido duradero de interdependencia y de responsabilidad colectiva. Las escuelas que respaldan el éxito para todos los estudiantes se caracterizan por ostentar un sentido colectivo de responsabilidad hacia la mejora (Williams 2003) y un sentido de eficacia colectiva: una creencia de que el cuerpo docente tiene la capacidad para implementar las acciones necesarias con objeto de marcar una diferencia para sus estudiantes (Barber y Mourshed 2007; Hoy, Tarter y Hoy 2006). Los educadores matemáticos deben ser responsables, individual y colectivamente, con ellos mismos y con el aprendizaje de *todos* los estudiantes y no sólo con el aprendizaje de los alumnos de su grupo. En una cultura del profesionalismo, los docentes adoptan la transparencia de su trabajo, de sus logros y de sus retos; asimismo, comparten ideas, conocimientos y prácticas conforme colaboran en formas que se basan en las fortalezas individuales y superan retos individuales, con el propósito de garantizar el éxito matemático para todos los educandos. Es más, esta colaboración puede mejorarse mediante los esfuerzos de los asesores pedagógicos matemáticos o los especialistas que fungen como mentores para ayudar y coordinar la enseñanza matemática en el salón de clases, la escuela o el distrito.

Los maestros de matemáticas también reconocen que están comprometidos con la profesión matemática y en consecuencia son aprendices y hacedores de matemáticas de por vida. La *Conference Board of the Mathematical Sciences* [Junta Directiva de las Ciencias Matemáticas (*CBMS* 2012)] ha subrayado la importancia de que los docentes de matemáticas, de todos los niveles, profundicen de manera continua su conocimiento matemático para la enseñanza, en el transcurso de su carrera. Estos esfuerzos ofrecen a los profesores oportunidades naturales para colaborar con los matemáticos y los educadores matemáticos

(es decir, la profesión matemática enriquecida con el contenido y los conocimientos pedagógicos de los docentes). El continuo desarrollo de los maestros de matemáticas puede mejorarse cuando interactúan con los matemáticos y los educadores matemáticos para analizar asuntos curriculares y de enseñanza (*CBMS* 2012). Los *Mathematics and Science Partnerships* [Consorcios para las matemáticas y ciencias] definidos por la *National Science Foundation* [Fundación Nacional de la Ciencia] y el *U.S. Department of Education* [Ministerio de Educación de Estados Unidos] son ejemplos de colaboración entre los docentes, los matemáticos y los investigadores de la didáctica matemática, que ejemplifican el potencial de tales colaboraciones para mejorar la práctica del profesor, su comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza y el aprendizaje de sus educandos (*Mathematical Sciences Research Institute* 2009) [Instituto de Investigación de las Ciencias Matemáticas].

Obstáculos

En muchas escuelas, el aislamiento profesional socava en gran medida los intentos por incrementar la colaboración entre colegas, tanto de manera interna (entre colegas de la misma escuela) como externamente (entre docentes, matemáticos y los educadores matemáticos) (Scholastic y Bill y Melinda Gates Foundation, 2012). Tal aislamiento se erige como un obstáculo para garantizar el éxito matemático de todos los estudiantes y el crecimiento continuo de los profesores. Por desgracia, algunos profesores en verdad hacen suyas las normas de aislamiento y autonomía (Hattie 2012). Un peligro de esta práctica es que puede conducir a los docentes a desarrollar inconsistencias en su labor, las cuales a su vez pueden generar disparidades en el aprendizaje del alumno, contribuyendo a las existentes diferencias en el aprendizaje (Ferrini-Mundy *et al*. 1998). Por el contrario, la investigación señala no solamente que los estudiantes alcanzan un crecimiento en su logro matemático cuando sus maestros trabajan regularmente en forma colaborativa, sino que se observa una reducción en las tradicionales lagunas de conocimiento habidas entre grupos disjuntos, en comparación con quienes tienen profesores que trabajan aisladamente (Moller *et al*. 2013).

La norma del maestro aislado debe dar paso —con el objeto de erigir una cultura del profesionalismo y para promover el éxito matemático para todos los estudiantes— a una nueva norma profesional de colaboración. Debe convertirse en norma para los docentes el creer que tienen una responsabilidad profesional de colaborar con sus colegas y que deben abrir su práctica a la observación, al estudio y al mejoramiento colectivos (*NCTM* 2007). La participación en las organizaciones profesionales de docentes constituye una forma de lograr esta visión. Las comunidades nacionales, estatales o provinciales y las locales permiten tender una red importante por medio de la asistencia a las conferencias y a sus institutos, así como a través de la publicación de periódicos y libros. Tal y como Stigler y Hiebert (1999, p. 179) sugirieron:

> Los profesores sobresalientes del siglo xxi serán aquellos que trabajen juntos para verter las mejores ideas a la práctica estándar. Serán los docentes que colaboren en la construcción de un sistema que tenga como meta mejorar el aprendizaje del alumno de un grupo "promedio", quienes trabajen de manera gradual para perfeccionar las prácticas estándares del salón de clase… Los maestros sobresalientes del siglo xxi serán aquéllos que trabajen todos los días en el mejoramiento de la enseñanza, no sólo para sí mismos, sino para la profesión en su conjunto.



Uno de los grandes desafíos que enfrentan las escuelas es la falta de tiempo para los docentes y los administradores (White 2011), y la cortedad de tiempo claramente es un obstáculo para crear estructuras colaborativas que reduzcan el aislamiento del docente. El tiempo de la jornada escolar suele ser inadecuado para la colaboración. A una enorme cantidad de maestros se les ofrecen muy pocas y limitadas oportunidades para colaborar, si acaso se las proporcionan (*Scholastic y Bill y Melinda Gates Foundation* 2012). La planificación y la resolución de problemas suelen llevarse a cabo de manera individual; además, el espíritu de la autonomía profesional a menudo apabulla cualquier aceptación de la colaboración profesional necesaria para fortalecer la práctica profesional. En la mayoría de las escuelas, la calendarización diaria no contempla un tiempo para que los equipos formados por maestros del mismo grado de enseñanza o asignatura compartan, colaboren, fortalezcan sus habilidades pedagógicas o profundicen su conocimiento matemático. Incluso cuando se asigna tiempo para que los profesores colaboren con comunidades profesionales de aprendizaje, éste a menudo es demasiado limitado y se calendariza con mucha irregularidad para que pueda promover el tipo de desarrollo profesional sustentable, enfocado en las matemáticas y en la forma en que ésta se enseña, lo cual resulta necesario para mejorar el aprendizaje del alumno (Blank y de las Alas 2009). Si los docentes habrán de garantizar el éxito matemático para todos los estudiantes, entonces deben abordarse y superarse los desafíos relacionados con el tiempo.

La actual estructura del desarrollo profesional a menudo representa un obstáculo para el desarrollo de una cultura del profesionalismo. Los docentes suelen sentir que el desarrollo profesional es algo que se hace *para* ellos, en vez de que sea algo hecho *por* ellos, involucrándolos como socios activos de su propio crecimiento profesional. Una gran cantidad de lo que en la actualidad se ofrece a los profesores como desarrollo profesional tiene un valor exiguo y su impacto es marginal sobre su conocimiento pedagógico, su práctica o el logro de sus alumnos (Garet *et al*. 2010). Un informe del *Center for American Progress* [Centro para el progreso estadounidense] (DeMonte 2013) señala que esta falta de valor y de impacto quizá se deba al hecho de que el desarrollo profesional actual suele ser “de corta duración, episódico y desconectado” (p. 1).

Los programas eficaces de desarrollo profesional fomentan el progreso de los maestros de matemáticas en cuatro áreas importantes (véase Doerr, Goldsmith y Lewis [2010] para detalles adicionales):

- El conocimiento matemático de los docentes y su capacidad para utilizarlo en la práctica.
- La capacidad de los maestros para observar, analizar y responder al pensamiento del estudiante.
- Las creencias y disposiciones del profesor que alientan su aprendizaje continuo.
- Las relaciones del docente con sus colegas y las estructuras de aprendizaje que pueden apoyar y conservar su aprendizaje.

La evidencia de la investigación señala varias características del desarrollo profesional de alta calidad que respaldan estas metas (Blank y de las Alas 2009; Doerr, Goldsmith y Lewis 2010):

- Tiempo sustancial para la investigación durante un periodo continuo (por ejemplo, seis meses o más).
- Apoyo sistémico para el aprendizaje de los docentes (es decir, apoyo y coherencia administrativos con otras iniciativas escolares).
- Oportunidades para los docentes a fin de que participen en un aprendizaje activo.
- Oportunidades para los profesores con el objeto de que estudien las matemáticas subyacentes al currículo que enseñan.

La siguiente tabla compara algunas de las creencias improductivas y productivas en el área del profesionalismo. Resulta importante observar que estas creencias no deben concebirse como buenas o malas, sino más bien como productivas cuando apoyan la enseñanza y el aprendizaje eficaces o improductivas cuando limitan el acceso de los profesores al conocimiento y al apoyo para implementar prácticas de enseñanza eficaces.

Creencias sobre el profesionalismo en la educación matemática	
Creencias improductivas	**Creencias productivas**
Los docentes egresados de los programas de preparación magisterial están listos para ser maestros eficaces.	El desarrollo de la pericia como maestro de matemáticas es un proceso a largo plazo. La base del conocimiento de una enseñanza y aprendizaje eficaces de las matemáticas está en continua expansión.
Para llevar a cabo una enseñanza eficaz basta un profundo conocimiento del contenido matemático.	Los profesores de matemáticas siguen aprendiendo a lo largo de toda su carrera en las áreas del conocimiento matemático para la enseñanza, el conocimiento pedagógico matemático y el conocimiento de los estudiantes en tanto aprendices de matemáticas.
Los maestros eficaces pueden trabajar de forma autónoma y en aislamiento. Mientras los estudiantes del grupo de uno tengan éxito, todo estará bien.	Los docentes que colaboran con sus colegas dentro y fuera de la escuela son más eficaces. Todos los profesores de matemáticas son colectivamente responsables del aprendizaje de los estudiantes, del mejoramiento de la base del conocimiento profesional y de la eficacia de cada uno de los maestros.



Creencias sobre el profesionalismo en la educación matemática	
Creencias improductivas	**Creencias productivas**
La asesoría pedagógica es innecesaria y representa un lujo para el presupuesto escolar. Sin embargo, los maestros novatos pueden beneficiarse de un cierto apoyo de asesoría general.	Todos los profesionales, incluso los docentes experimentados, se pueden beneficiar de una asesoría pedagógica centrada en el contenido.
Los profesores deberían estar en contacto directo con los estudiantes todas o casi todas las jornadas escolares.	Una prioridad para las escuelas y los distritos es asignar un tiempo regular para la planificación colaborativa centrada en el contenido –la cual elaboran maestros del mismo grado o del mismo curso– así como programar tiempo para hacer una articulación vertical periódicamente.
Los maestros muy eficaces poseen una habilidad innata y natural para brindar una enseñanza innovadora, lo cual da como resultado que el alumno muestre altos niveles de logro.	Con el tiempo, los profesores muy eficaces se convierten en maestros expertos de su materia al mejorar de manera continua su conocimiento matemático para la enseñanza, sus habilidades pedagógicas matemáticas y el conocimiento de sus alumnos en tanto aprendices de matemáticas.
Los libros de texto y los recursos digitales ofrecen todo lo necesario concerniente con los planes y las actividades de las lecciones, por lo que los docentes no necesitan llevar a cabo una planificación detallada de la unidad ni de las lecciones.	Una enseñanza matemática eficaz es resultado de la planificación deliberada. Los maestros muy eficaces colaboran para diseñar lecciones de matemáticas detalladas y luego reflexionan sobre la eficacia de tales planes en el aprendizaje del estudiante, a través de un ciclo de mejora continua.

Superación de los obstáculos

Asignar tiempo para fomentar la colaboración entre los docentes y asignar asesores pedagógicos a las escuelas con el fin de que apoyen a los maestros en la implementación de prácticas de enseñanza eficaces, son dos enfoques que emplean los sistemas escolares de alto desempeño con el propósito de respaldar el crecimiento continuo del profesorado y para garantizar el éxito matemático de todos los estudiantes (Barber y Mourshed 2007).

Colaboración con la enseñanza

La comunidad profesional de enseñanza es una estructura que está pensada con el propósito de asegurar que los docentes dispongan de tiempo para el trabajo colaborativo. Schmoker (2006) observó que “las comunidades profesionales de aprendizaje han surgido como el medio —y probablemente sean el mejor— con mayor consenso, mediante el cual se perfecciona de manera continua la enseñanza y el desempeño del

estudiante… Los resultados de los estudios de la comunidad de investigadores sobre este enfoque son muy loables" (p. 106). Existen enfoques y protocolos específicos para establecer las comunidades profesionales de aprendizaje (Allison *et al*. 2010; DuFour *et al*. 2006; Kanold y Larson 2012; Perry 2011), pero la consideración más importante no es el tipo o enfoque específico tomado en cuenta para la colaboración, sino el modo en que se implementa. Los docentes de las comunidades profesionales de enseñanza que son eficaces…

- examina y da prioridad al contenido matemático y las prácticas matemáticas que los estudiantes han de aprender;
- desarrollan y utilizan las evaluaciones usuales para determinar si los alumnos han aprendido el contenido consensuado y las prácticas matemáticas relacionadas;
- usan datos para impulsar la reflexión continua y las decisiones referentes al aprendizaje;
- establecen metas de aprendizaje a largo y corto plazo;
- analizan, seleccionan e implementan estrategias y planes comunes de enseñanza basadas en la investigación;
- desarrollan planes de acción que los maestros puedan implementar cuando los estudiantes demuestren que han logrado o no han alcanzado los estándares; y
- tienen oportunidades para aprender en forma continua, incluyendo el conocimiento matemático para la enseñanza, la habilidad pedagógica matemática y el conocimiento de los estudiantes en tanto aprendices de matemáticas.

La colaboración de los profesores no conduce de manera automática al mejoramiento de la enseñanza o aprendizaje profesionales. Con frecuencia la colaboración se caracteriza como algo que es poco más que compartir materiales o intercambiar historias (Stein, Russell y Smith 2011). La evidencia sugiere que los maestros quizá necesiten hasta tres años para comenzar a trabajar juntos de manera eficaz y pasar de la mera cooperación para llegar a la verdadera colaboración (Perry y Lewis 2010). Las comunidades profesionales de enseñanza deben centrarse en asuntos relacionados con la pedagogía y el logro de los estudiantes; además, deben explorar la manera en que los docentes pueden avanzar conjuntamente hacia metas comunes.

La enseñanza efectiva se basa, en parte, en una planificación cuidadosa de ésta. La co-planificación de una lección por parte de los docentes constituye una de las más grandes oportunidades de tener una influencia positiva en el aprendizaje del estudiante (Hattie 2012; Morris, Hiebert y Spitzer 2009). En algunas culturas (por ejemplo en los países del Lejano Oriente, como Japón) los maestros de matemáticas dedican una gran cantidad de tiempo a la planificación de lecciones y preparan de forma colaborativa planes de clase detallados y extensos (Cheng 2011). Por el contrario, en Estados Unidos constituye una práctica usual que los docentes inviertan relativamente poco tiempo para el desarrollo de planes de clase de matemáticas (Ding y Carlson 2013). Con el propósito de mejorar la enseñanza y garantizar el éxi-



to matemático para todos los estudiantes, la práctica de planificar la enseñanza de manera limitada y solitaria debe eliminarse y sustituirse con una que brinde tiempo para una planificación colaborativa.

Los maestros de matemáticas eficaces no sólo colaboran, sino que también centran sus esfuerzos colaborativos en perfeccionar la enseñanza y el aprendizaje del alumno mediante la co-planificación de las lecciones. Se ha demostrado que una estrategia muy productiva —para fomentar un mayor número de interacciones profundas dentro de comunidades colaborativas y para producir un cambio en la práctica del docente— es que el trabajo del profesor se enfoque, al interior de las comunidades profesionales de aprendizaje, en la planificación cuidadosa de las lecciones (Perry y Lewis 2010; Stein, Russell y Smith 2011). Muchos maestros expresan su preocupación respecto de que no tienen tiempo para dedicarse a la planificación detallada de cada lección que enseñan. Sin embargo, la falta de tiempo que se percibe para dedicarse a planificar con meticulosidad *todas* las lecciones y reflexionar sobre ellas, no puede utilizarse como una excusa para que *jamás* se aprenda, se planifique y se reflexione colaborativamente en torno a la eficacia de las lecciones clave (Kanold y Larson 2012).

Los maestros deberían trabajar de manera continua con otros docentes de su mismo grado o curso, así como también comprometerse en un diálogo progresivo a través de grados y cursos con maestros de matemáticas que enseñen a estudiantes de otros grados y cursos distintos a los suyos. Resulta esencial que se reserve un tiempo para garantizar que los maestros de todas las escuelas y distritos tengan una visión compartida de los desarrollos de aprendizaje de todos los alumnos, en lo concerniente con el contenido y las prácticas matemáticos. En los distritos escolares más pequeños, las comunicaciones electrónicas, incluyendo los *blogs* y las redes sociales, pueden usarse para conectar a los docentes, quienes de otra forma se sentirían aislados a causa del tamaño de la escuela o por cuestiones geográficas.

La enseñanza es una profesión compleja y con muchas presiones, por lo que con mucha frecuencia se tiene como resultado que los docentes no se toman el tiempo necesario para involucrarse en una reflexión estructurada. En cambio, en el mejor de los casos se centran en buscar soluciones rápidas para los problemas inmediatos, sin abordar las más importantes necesidades de aprendizaje a largo plazo de los educandos (Korthagen y Vasalos 2010). No obstante, el proceso de reflexión resulta fundamental, por lo que el *NCTM* (2007) asevera que el factor esencial para el crecimiento y el mejoramiento de la enseñanza no es sólo la preparación de la clase, sino que también debe considerarse el *análisis de los resultados de las lecciones* durante y después de la lección. El grado en el que la práctica de enseñanza de los profesores se perfeccione, depende en parte qué tan bien y con qué frecuencia reflexionen sobre su práctica educativa (Artzt, Armour-Thomas y Curcio 2011).

Para perfeccionar la práctica educativa, los docentes requieren dedicar más tiempo no sólo a la planificación colaborativa, sino también a la reflexión deliberada y estructurada. El estudio de la lección constituye un método estructurado para el diseño colaborativo de las lecciones y para reflexionar sobre ellas (véase Fernández y Yoshida 2004; Lewis 2002). Otra estrategia para suministrar una reflexión más

estructurada es usar datos de video (Marzano *et al*. 2012). Muchas evaluaciones del desempeño para la enseñanza —utilizadas para el licenciamiento y la tutoría iniciales— necesitan recursos de video digital y hacer una reflexión sobre los episodios de enseñanza en el salón de clases. Aunque a veces los docentes sienten al principio que la experiencia de verse ellos mismos es incómoda, no tardan en descubrir que al observar y hacer críticas a la enseñanza con sus colegas utilizando videos, puede ser una de las formas más eficaces para fomentar la reflexión, el desarrollo y el aprendizaje (Artz *et al*. 2011; Marzano *et al*. 2012). Es más, el empleo de las lecciones videograbadas y de la reflexión termina con la práctica cultural de la enseñanza como una práctica aislada y alienta un sentido de responsabilidad colectiva para el perfeccionamiento de la práctica profesional (Hiebert *et al*. 2003).

Apoyo con asesoría pedagógica

Siendo tan importante como es, los profesores de matemáticas colaboran para fomentar tanto el mejoramiento de la enseñanza como su continuo desarrollo como profesionales; también resulta de utilidad que busquen y obtengan el apoyo de un asesor pedagógico, el cual sirva como recurso de apoyo o como mentor. Un asesor pedagógico de matemáticas o especialista “es un individuo que está muy familiarizado con el contenido y la pedagogía de las matemáticas y que trabaja directamente con los profesores ante grupo a fin de mejorar el aprendizaje matemático del estudiante” (Hull, Balka y Harbin Miles 2009, p. 3).

Muchos profesionales altamente eficaces pertenecientes a una variedad de campos buscan asesoramiento para desarrollarse y perfeccionarse de manera continua (Knight 2007). Aunque se observa una tendencia a considerar a los asesores pedagógicos como un lujo, la asesoría educativa puede ser una estrategia muy eficaz para mejorar el desempeño profesional (Gawande 2011). Es más probable que los docentes que reciben asesoría pedagógica implementen nuevas estrategias (McGatha 2009; Wei *et al*. 2009; Tschannen-Moran y McMaster 2009); asimismo, la asesoría eficaz puede tener un impacto positivo sobre el aprendizaje del estudiante (Campbell y Malkus 2011).

La asesoría pedagógica es un componente esencial para el respaldo de la implementación de prácticas de enseñanza eficaces. No constituye un lujo el proporcionar, apoyar e involucrar a los asesores pedagógicos matemáticos o a los especialistas, si la meta de la escuela o distrito consiste en garantizar el éxito matemático para todos los estudiantes. Los maestros de matemáticas deben estar abiertos al trabajo colaborativo con sus colegas y con los asesores pedagógicos matemáticos o con los especialistas, quienes les ayudan mientras siguen perfeccionando su propio conocimiento del contenido y la pedagogía matemáticos y mejoran el logro de sus alumnos.

Ejemplo

El siguiente ejemplo muestra el potencial de un equipo de enseñanza colaborativa para respaldar el crecimiento profesional continuo de los docentes y profundizar el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas por parte de los alumnos:



Un equipo de enseñanza colaborativa de docentes de tercer grado se está reuniendo a la hora asignada para planificación quincenal de matemáticas después de la jornada escolar. A pesar de que el equipo no asignó tiempo para el trabajo de la comunidad profesional de aprendizaje, los docentes se comprometieron en reunirse cada dos semanas en horas fuera de su jornada para planificar de manera colaborativa lecciones de matemáticas, reflexionar sobre la eficacia de ellos y trabajar para perfeccionar su propia comprensión de las matemáticas y de su pedagogía. Ésta es la quinta de una serie de reuniones que el equipo ha dedicado a planificar clases sobre la forma de vincular los conceptos de multiplicación y división.

Este año, los profesores seleccionaron este tema de entre cinco, con objeto de enfocarse en una planificación a fondo. Basaron su selección de los vínculos entre los conceptos de multiplicación y división en el desempeño que los estudiantes tuvieron en años anteriores y en los desafíos que han enfrentado antes, al enseñar dicho tema. Los profesores supusieron que los alumnos no entienden los conceptos subyacentes y confían en procedimientos mecánicos; esta falta de comprensión contribuye a que se les dificulte relacionar esos conceptos. El equipo reconoció que para profundizar la comprensión de los alumnos, necesitan también desarrollar una comprensión más profunda de tales conceptos.

Para profundizar su propio conocimiento de las matemáticas subyacentes en el tema, los maestros decidieron leer al principio del año *Desarrollo de la comprensión esencial de la multiplicación y división para los maestros de matemáticas de los grados 3-5* (Otto *et al*. 2011). En la segunda y tercera reunión, los miembros del equipo analizaron el libro, enfocándose particularmente en el tercer capítulo, el cual aborda la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos básicos de la división y las relaciones entre la división y la multiplicación.

Esta lectura y el análisis resultante profundizaron la comprensión de los docentes de la multiplicación y división y motivaron un análisis constructivo que se extendió hasta la cuarta sesión y ahora está determinando la quinta, en la cual los profesores están pensando en tareas de enseñanza, representaciones y sugerencia para conversación[6] novedosas que pueden utilizar de dos formas: para comprometer a los estudiantes a desarrollar una comprensión de la división a partir de su comprensión de la multiplicación y para verificar que los estudiantes están desarrollando su comprensión conforme la lección se desarrolla.

Cuando los miembros del equipo terminaron su quinta reunión sobre este tema, ya habían escrito un plan de clase a profundidad (de seis páginas de extensión) para presentar a la división como una extensión de la multiplicación, el cual incluía tareas y ejemplos, preguntas clave, las respuestas anticipadas de los estudiantes y sus propias contestaciones, tareas prácticas guiadas, pre-

6 En inglés *discussion prompt*. En Estados Unidos es un recurso didáctico mediante el cual se dan unas pautas que guiarán la conversación entre alumnos.

guntas de resumen, lenguaje académico requerido en la lección, así como adaptaciones al inglés para los que están aprendiendo este idioma y para los discapacitados, además de tareas de evaluación formativa que les ayudarían a determinar si los estudiantes avanzaron hacia las metas de aprendizaje matemático establecidas.

Los miembros del equipo se comprometieron a emplear con sus estudiantes la lección planificada de manera colaborativa y acordaron reunirse para ver en la próxima reunión un video en donde un miembro del equipo está enseñando la lección. El equipo tiene pensado dedicar su próxima reunión a realizar un análisis de la eficacia de la lección que se diseñó colaborativamente, la cual evaluarán con base en el desempeño de los educandos, de modo que puedan adelantar las respuestas necesarias al aprendizaje de los estudiantes y a perfeccionar la lección, mejorándola para su uso futuro.

Manos a la obra

Construir una cultura de profesionalismo es una cuestión desafiante pero posible. Resulta importante reconocer que la enseñanza es una actividad cultural y que como tal se resiste al cambio (Stigler y Thompson 2009). Por consiguiente, erigir una cultura de la colaboración profesional tomará tiempo. El proceso de crear una nueva norma cultural de colaboración profesional, de apertura de la práctica, y de aprendizaje y mejoramiento continuos puede comenzar de diversas maneras. Los equipos formados por docentes del mismo grado o curso quizá se comprometan a crear evaluaciones de fin de unidad comunes, con el propósito de garantizar que todos los miembros del equipo tengan las mismas expectativas del aprendizaje del alumno en cada unidad. O acaso el desarrollo de una nueva norma de colaboración profesional empiece con un solo equipo con maestros del mismo grado o de un curso basado en las matemáticas que se comprometan a trabajar juntos en un solo plan de clase en horas fuera de la escuela, tal y como el equipo del ejemplo anterior lo hizo. De manera gradual, conforme vaya surgiendo la confianza entre los miembros, pueden comenzar a observarse entre sí y a reflexionar sobre las lecciones. Luego podrán diseñar, planificar y pensar en más lecciones y empezar a asociarse con matemáticos o con educadores matemáticos de la localidad a fin de profundizar su comprensión de las matemáticas y a mejorar su práctica.

En la medida que los profesores de matemáticas demuestren el impacto positivo que tal colaboración tiene sobre el aprendizaje del estudiante, deberían proponer una junta con los líderes de distrito y de escuelas para mostrarles los beneficios de una colaboración mayor y de un apoyo de asesoría pedagógica. Los docentes, administradores y otros líderes distritales deberían promover juntos más cambios estructurales y de política, sustanciales con el objeto de mejorar el profesionalismo en sus escuelas.



Puesta en acción

Como todo escrito, el documento *De los principios a la acción* no es más que palabras. Éstas seguirán siendo sólo ideas plasmadas en un papel o una pantalla, hasta que nos impulsen a todos a actuar. Las creencias continuarán siendo improductivas y los obstáculos seguirán obstruyendo el progreso hasta que de manera colectiva y colaborativa nosotros los confrontemos y llevemos a cabo las acciones que se requieran para resolver y superar esos retos.

Esta sección final aboga porque todos nosotros, quienes somos partes interesadas, tengamos un papel que desempeñar y realicemos acciones importantes, pues si a final de cuentas habremos de reconocer nuestra necesidad imperiosa de un mundo donde la educación matemática de nuestros estudiantes se derive de la investigación, se moldee con el sentido común y buen juicio y la aliente una creencia irrenunciable de que tenemos que desarrollar un conocimiento matemático y una autoconfianza en *todos* los estudiantes.

Necesitamos llevar a cabo acciones para garantizar que cada alumno llegue a confiar en su habilidad para aprender y usar las matemáticas. Debe verse a sí mismo como capaz de emplear su cada vez mayor comprensión matemática para dar sentido a nuevos problemas situados en el mundo que le rodea. Tal estudiante se percata de la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas y valora el papel que desempeñan éstas en el desarrollo de nuestra sociedad contemporánea. Busca relaciones entre las matemáticas y las disciplinas que se valen de las herramientas de aquélla: las ciencias físicas y de la vida, las ciencias sociales y las humanísticas. Dicho estudiante cree que las matemáticas tienen sentido, las concibe como un campo de estudio y está dispuesto a considerar la posibilidad de seguir sus estudios de matemáticas o de áreas relacionadas con éstas.

Necesitamos entrar en acción para crear grupos y ambientes de aprendizaje en donde los *estudiantes* estén activamente comprometidos con tareas que valen la pena y que fomentan la comprensión matemática, la resolución de problemas y el razonamiento. Estos estudiantes trabajan de modo colaborativo y también en forma independiente, usando una gama de recursos concretos, impresos y tecnológicos. Interactúan con sus compañeros y con su profesor; además se enfocan en: dar sentido a las matemáticas, comparar diversos enfoques para la resolución de problemas, así como en defender, confirmar, verificar o rechazar posibles soluciones. Aprenden en salones de clases que son un reflejo de nuestra era tecnológica, pues suministra herramientas digitales que permiten a los profesores hacer el aprendizaje más profundo como nunca antes.

Requerimos actuar para crear salones de clase en los que los alumnos se conviertan en personas que resuelven problemas matemáticos, les dan sentido y analizan sus soluciones. En dichos salones, los educandos trabajarían en problemas en

los que se tarden horas o incluso días en resolverlos, asemejándose a los problemas desafiantes y multifacéticos del mundo para los cuales los estamos preparando. Trabajarían con sus compañeros en forma cooperativa en esos problemas reales y complejos, usando una variedad de soluciones, y a menudo encontrando más de una solución lógicamente justificable. Se sentirían cómodos utilizando las matemáticas, entendiendo el poder del pensamiento matemático y podrían relacionar las matemáticas con contextos significativos.

¿Qué se necesitaría para crear esos grupos en cada escuela y distrito?

Líderes y responsables de políticas de todos los distritos y estados o provincias

Construir grupos y ambientes de aprendizaje eficaces para todos los estudiantes requerirá de los *líderes y responsables de políticas de cada distrito, estado o provincia, incluyendo a los comisionados, superintendentes y otros funcionarios de las oficinas centrales*, que están dedicados a garantizar que los profesores cuenten con los recursos y el apoyo esenciales para ejecutar las *Prácticas de la enseñanza matemática* a fin de tener una enseñanza y un aprendizaje efectivos. Dichos líderes y responsables de las políticas comprenden que sus políticas, programas y acciones deben tener como resultado dar poder a los profesores y directores. Están enfocados en garantizar que los directores posean el conocimiento y las herramientas con el objeto de promover y apoyar la enseñanza y el aprendizaje significativo de las matemáticas, incluyendo: el uso deliberado de la evaluación, que los profesores cuenten con el conocimiento y las herramientas para planificar e implementar lecciones de matemáticas sólidas y que los estudiantes tengan la oportunidad de llegar a ser diestros en el conocimiento matemático y confíen en su capacidad para aprender y dar sentido a las matemáticas. Tales líderes y responsables de las políticas garantizan que se asigne el tiempo suficiente, que se suministre los recursos adecuados y que las políticas productivas se ejecuten con el fin de asegurar que cada estudiante tenga acceso a las oportunidades y apoyos que requiera para tener éxito en las matemáticas. Están conscientes del impacto devastador del aislamiento profesional y crean estructuras colaborativas con el objeto de maximizar el desarrollo profesional; asimismo, apoyan que se tomen riesgos y alientan los nuevos enfoques que impulsan el avance del aprendizaje del alumno.

Por lo tanto, los líderes y los responsables de las políticas de todos los distritos, estados o provincias, incluyendo los comisionados, los superintendentes y otros funcionarios de las oficinas centrales deben llevar a cabo las siguientes acciones:

Para el Principio de enseñanza y aprendizaje:

- Llevar a cabo un desarrollo profesional progresivo que haga de la implementación de las ocho *Prácticas de la enseñanza matemática* una prioridad.
- Comunicar el valor de las *Prácticas de la enseñanza matemática* a los padres y a la comunidad, así como a todas las partes interesadas en la educación.



- Alinear las medidas de responsabilidad de los docentes y directores con las *Prácticas de la enseñanza matemática*.

Para el Principio de acceso y equidad:

- Asignar recursos con el objeto de asegurar que a todos los estudiantes se les brinde el tiempo de enseñanza apropiado a fin de maximizar su potencial de aprendizaje.
- Garantizar que los docentes de todos los niveles hagan énfasis en las prácticas matemáticas como un elemento clave de su enseñanza a todos los estudiantes.
- Eliminar el encasillamiento de los estudiantes de bajo desempeño, brindando en su lugar intervenciones que proporcionen una enseñanza de alta calidad, así como otros apoyos en el salón de clases, como asesores pedagógicos matemáticos y especialistas.
- Proporcionar estructuras de apoyo, actividades co-curriculares y recursos con el objeto de incrementar el número de estudiantes de todas las razas, etnias, géneros y estratos socioeconómicos que obtengan los más altos niveles de logro matemático.

Para el Principio del currículo:

- Asegurar que el currículo matemático refleja la importancia de las prácticas matemáticas y que además apoya y promueve la compresión conceptual, la destreza procedimental y sus aplicaciones para resolver problemas del mundo real.

Para el principio de las herramientas y tecnología:

- Incorporar y apoyar el uso eficaz de las herramientas y tecnología apropiadas en los estándares curriculares de matemáticas en todos los grados.
- Examinar lo que las matemáticas deberían enseñar, revisar con regularidad la relevancia de los temas requeridos a la luz de la tecnología y considerar otros temas que pudieran necesitarse.
- Revisar constantemente las posibilidades de emplear la tecnología a fin de mejorar la productividad del maestro y del aprendizaje del alumno.

Para el Principio de evaluación:

- Alinear las evaluaciones con las metas de los programas matemáticos, a través de la medición de la comprensión conceptual y de la destreza de los estudiantes en las prácticas matemáticas.
- Crear estructuras para garantizar que los resultados de todas las evaluaciones se utilicen para reforzar la enseñanza, el currículo y el apoyo a los estudiantes.

Para el Principio de profesionalismo:

- Asignar recursos para el personal de asesoría pedagógica matemática o para los especialistas de las escuelas.
- Asignar tiempo, apoyo y recursos para ofrecer firmes oportunidades para las comunidades profesionales de aprendizaje y para otras estructuras colaborativas de los profesores de matemáticas.
- Basar las decisiones sobre el licenciamiento de docentes, la evaluación de los maestros o sobre la ubicación de un curso para los estudiantes en la evidencia proporcionada por diversas medidas.

¿Qué más se necesita para crear esos salones de clase en cada escuela y distrito?

Directores, asesores pedagógicos, especialistas y otros líderes escolares

Construir grupos y ambientes de aprendizaje eficaces en cada escuela y distrito requerirá de *directores, asesores pedagógicos, especialistas y otros líderes escolares*, mismos que están dedicados a apoyar a los docentes en sus esfuerzos por comprometer a los estudiantes con las matemáticas trascendentales y que comprenden a la perfección las ocho *Prácticas de la enseñanza matemática* a fin de tener una enseñanza eficaz y apoyar a los profesores en la planificación e implementación firmes de las mismas. Dichos líderes y responsables de las políticas comprenden que sus políticas, programas y acciones deben tener como resultado dar poder a los profesores y directores. Están enfocados en garantizar que los directores posean el conocimiento y las herramientas con el objeto de promover y apoyar la enseñanza y el aprendizaje significativo de las matemáticas, incluyendo: el uso deliberado de la evaluación, que los profesores cuenten con el conocimiento y las herramientas para planificar e implementar lecciones de matemáticas sólidas y que los estudiantes tengan la oportunidad de llegar a ser diestros en el conocimiento matemático y confíen en su capacidad para aprender y dar sentido a las matemáticas. Tales líderes y responsables de las políticas garantizan que se asigne el tiempo suficiente, que se suministre los recursos adecuados y que las políticas productivas se ejecuten con el fin de asegurar que cada estudiante tenga acceso a las oportunidades y apoyos que requiera para tener éxito en las matemáticas. Están conscientes del impacto devastador del aislamiento profesional y crean estructuras colaborativas con el objeto de maximizar el crecimiento profesional; asimismo, apoyan que se tomen riesgos y alientan los enfoques que impulsan el avance del aprendizaje del alumno.

Por lo tanto, directores, asesores pedagógicos, especialistas y otros líderes escolares deberían llevar a cabo las siguientes acciones:

Para el Principio de enseñanza y aprendizaje:

- Lograr que los ocho *Principios de la enseñanza matemática* sean un punto central de toda la escuela y que se da por sentado que los docentes refuercen la enseñanza y el aprendizaje de todos los alumnos.



- Proporcionar un desarrollo y una capacitación profesionales que tengan como prioridad la implementación de las *Prácticas de la enseñanza matemática*.
- Observar las clases o emprender caminatas por el salón, teniendo a las *Prácticas de la enseñanza* como el punto central.

Para el Principio de acceso y equidad:

- Tener en cuenta las prácticas de asignación de profesores a fin de asegurar que los estudiantes con problemas tengan acceso a una enseñanza de las matemáticas que incorpore las *Prácticas de la enseñanza matemática*.
- Conservar una cultura en toda la escuela en la que se tenga altas expectativas y un pensamiento abierto.
- Desarrollar e implementar intervenciones de alta calidad.
- Garantizar que los recursos curriculares y extra-curriculares estén disponibles para apoyar y ofrecer desafíos a todos los estudiantes.

Para el Principio del currículo:

- Asignar un tiempo para las interacciones colaborativas entre los profesores de matemáticas con el propósito de estudiar el currículo escolar de los grados o cursos distintos de los suyos.
- Asegurar que los mapas curriculares y las guías para la dosificación de temas sean flexibles y sirvan como un recurso para los maestros de matemáticas, al proporcionar una secuencia general y una línea de tiempo, pero a la vez permitiendo una variación razonable en la dosificación a fin de satisfacer las necesidades de los estudiantes.
- Garantizar que el proceso de selección de los libros de texto y de otros materiales educativos sea un proceso colaborativo que incluya un meticuloso examen de la medida en que los libros de texto no sólo cumplen los estándares, sino que también: desarrollan los temas de manera coherente para uno y todos los grados, promueven las prácticas matemáticas y apoyan la enseñanza eficaz, tal y como se define en las *Prácticas de la enseñanza matemática*.

Para el Principio de las herramientas y tecnología:

- Garantizar que los maestros de matemáticas tengan un específico desarrollo profesional matemático sobre tecnología y sus relaciones con el currículo y la enseñanza.
- Esperar y alentar a los profesores de matemáticas a que implementen de un modo activo la utilización de tecnología educativa y materiales físicos, y además que esa expectativa se refleje en las evaluaciones del salón de clases.
- Establecer criterios para la selección de libros de texto y de materiales educativos, los cuales incluyan un uso de la tecnología regular y eficaz.

Para el Principio de evaluación:

- Convertir en norma el diseño y la implementación colaborativos de los procesos comunes de evaluación formativa; asignar el tiempo requerido para que los equipos de maestros de un mismo grado o curso efectúen este trabajo.
- Suministrar a los docentes un apoyo para el desarrollo profesional que requieren a fin de acrecentar su conocimiento sobre la evaluación.
- Asegurar que los equipos colaborativos empleen los resultados de las evaluaciones en forma apropiada, con el propósito de guiar y modificar las prácticas de enseñanza y hacer mejoras en el programa.

Para el Principio de profesionalismo:

- Proporcionar oportunidades adecuadas y actuales para el crecimiento y desarrollo profesional de los profesores, incluyendo las oportunidades para asesorías pedagógicas y la planificación colaborativas, que formen la capacidad de implementar las *Prácticas de la enseñanza matemática*.
- Asignar tiempo para que los maestros colaboren en las comunidades profesionales de aprendizaje.
- Conservar una cultura de mejoramiento, aprendizaje y colaboración continuos.
- Apoyar al personal de los asesores pedagógicos matemáticos, los especialistas y los líderes de enseñanza.
- Respaldar el desarrollo profesional continuo que compromete a los maestros con un incesante crecimiento de su conocimiento matemático para la enseñanza, de su conocimiento pedagógico y de su conocimiento de los estudiantes en cuanto aprendices de matemáticas.

¿Qué más se necesita para crear esos salones de clase en cada escuela y distrito?

Maestros

Crear grupos eficaces y construir ambientes de enseñanza eficaces para todos los estudiantes de cada escuela y distrito –algo que es muy importante–requerirá de *docentes* que planifiquen e implementen de manera eficaz unas instrucciones como las descritas en los *Principios de la enseñanza matemática*. Esos maestros establecen metas claras para las matemáticas que sus alumnos aprenderán y seleccionan una secuencia coherente de actividades y problemas que estén acordes con esas metas. Usan las preguntas de manera eficaz para evaluar y hacer progresar la comprensión del alumno, ofrecen oportunidades para que se dé un esfuerzo productivo y facilitan el discurso para alentar la comprensión conceptual y la destreza en los procedimientos. Utilizan las representaciones matemáticas para respaldar el aprendizaje de los educandos y para recopilar y emplear la evidencia del pensamiento de los alumnos en la modificación y mejora de la enseñanza. Conocen y utilizan los recursos cultu-



rales y lingüísticos de sus alumnos para crear ambientes de aprendizaje que generen y amplíen tales recursos, cerciorándose que el aprendizaje esté relacionado con su sentido de identidad matemática. Trabajan en forma colaborativa con sus colegas en la planificación de la enseñanza, la resolución de desafíos comunes y para proporcionarse apoyo, conforme asumen colectivamente la responsabilidad del aprendizaje de los estudiantes.

Por tanto, los maestros de matemáticas deben llevar a cabo las siguientes acciones.

Para el Principio de enseñanza y aprendizaje:

- Implementar de modo consistente los ocho *Principios de la enseñanza matemática*.
- Deducir, evaluar y alabar los distintos enfoques y trayectorias de solución que los estudiantes tomen para resolver problemas matemáticos, explicar su pensamiento y criticar los argumentos de otros.
- Dar prioridad a las prácticas matemáticas, incluyendo la resolución de problemas, el razonamiento y la generación de argumentos viables para cada aspecto de la práctica en el salón de clases (a saber, enseñanza, evaluación, decisiones curriculares y la utilización de herramientas y tecnología).
- Planificar e implementar unidades y lecciones que promuevan una disposición positiva hacia el estudio de las matemáticas, incluyendo la curiosidad, la autoconfianza, la flexibilidad y la perseverancia.

Para el Principio de acceso y equidad:

- Desarrollar ambientes que sean social, emocional y académicamente seguros para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; ambientes en los que los estudiantes se sientan seguros para involucrarse con sus compañeros y con sus maestros.
- Comprender y utilizar como recursos los contextos sociales, los antecedentes culturales y las identidades de los alumnos, a fin de alentar el acceso, motivar a los educandos para que aprendan más matemáticas y comprometer su interés.
- Crear altas expectativas para que cada estudiante alcance el éxito en la resolución de problemas, el razonamiento y la comprensión.
- Fomentar el desarrollo de un pensamiento abierto entre los estudiantes.

Para el Principio del currículo:

- Utilizar un abanico de recursos impresos y en línea de alta calidad, a fin de planificar con meticulosidad unidades y lecciones basadas en las *Prácticas de la enseñanza matemática*.
- Familiarizarse con los estándares de contenido mediante la lectura y la reflexión en torno a las ideas fundamentales de los estándares y de los desarrollos de aprendizaje que los estudiantes siguen.

- Comprometerse en un diálogo con los colegas que enseñan otros cursos de matemáticas o en otros grados, con el propósito de comprender el currículo propuesto desde la perspectiva vertical y horizontal.

- Evaluar los materiales y recursos curriculares, incluyendo los libros de texto, los conjuntos de actividades y el software, en aras de determinar en qué medida cumplen estos materiales con los estándares y garantizan el desarrollo coherente de los temas del grado correspondiente y de los demás, promueven las prácticas matemáticas y apoyan la enseñanza eficaz que implementa las *Prácticas de la enseñanza matemática*.

- Dar secuencia a las tareas y actividades teniendo en mente metas a largo plazo; enfocarse en las conexiones entre las ideas clave matemáticas que se ubican en contextos matemáticos y del mundo real, cuando se está llevando a cabo la planificación de la unidad y de la lección.

Para el principio de las herramientas y tecnología:

- Implementar lecciones que usen las investigaciones tecnológicas que preceden o acompañan al desarrollo de las habilidades que emplean lápiz y papel.

- Garantizar que los estudiantes se percaten tanto de las limitaciones como del poder de la tecnología; confiar en que examinen las respuestas para conocer su razonabilidad y aplicabilidad al contexto; escoger las herramientas adecuadas para la tarea que se lleva a cabo.

- Incorporar las herramientas y la tecnología matemática como si fueran parte de las matemáticas cotidianas que se estudian en el salón, reconociendo que los estudiantes deben experimentar "las tecnologías de las matemáticas dinámicas" y los objetos manipulables físicos o virtuales, con el propósito de explorar las matemáticas trascendentales.

- Planificar meticulosamente la utilización de la tecnología habida en el salón, con el propósito de asegurar que construye el razonamiento y la comprensión del estudiante.

Para el Principio de evaluación:

- Trabajar en equipos colaborativos formados por maestros del mismo grado o curso, a fin de desarrollar evaluaciones comunes que se utilizarán de un modo formativo; comprometerse con su uso y analizar y aplicar los resultados para mejorar el aprendizaje del alumno y mejorar la enseñanza.

- Evaluar el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, con base en diversas medidas, con el objeto de hacer juicios más confiables y válidos en torno a lo que los educandos saben y son capaces de hacer.

- Suministrar a los estudiantes una retroalimentación descriptiva, exacta y oportuna de sus evaluaciones, que incluya las fortalezas, las debilidades y los siguientes pasos que se darán para avanzar hacia los objetivos de aprendizaje.



- Reconocer que la enseñanza eficaz y la revisión en curso son estrategias insuperables para la "preparación para los exámenes" rigurosos.
- Concebir los resultados de la evaluación como elementos que proporcionan la imagen de la eficacia de la enseñanza y utilizarlos para orientar la toma de decisiones educativas, enfocarse en el crecimiento profesional personal y para llevar a cabo mejoras en el programa.

Para el Principio de profesionalismo:

- Desarrollar continuamente el conocimiento matemático para la enseñanza, el conocimiento matemático pedagógico y el conocimiento de los estudiantes en tanto aprendices de las matemáticas.
- Exigir oportunidades para el desarrollo profesional y para la colaboración que refuerce tanto el conocimiento del contenido matemático como la implementación de las *Prácticas de enseñanza matemática.*
- Colaborar con los colegas en temas de *acceso y equidad, currículo, enseñanza, herramientas y tecnología, evaluación y desarrollo profesional*.
- Asumir la responsabilidad colectiva del aprendizaje en la escuela de todos los estudiantes.
- Juntarse y participar en las organizaciones profesionales locales, estatales o nacionales.

Cada líder y responsable de las políticas, cada administrador de escuela y de distrito y cada docente, asesor pedagógico y especialista de matemáticas –junto con todas las otras partes interesadas, abarcando desde los padres hasta los miembros de la comunidad– deben hacer un compromiso con estas acciones. Sólo cuando estas palabras devengan acciones y éstas conduzcan a creencias más productivas, las nuevas normas para la práctica de la enseñanza y la implementación de los elementos de apoyo esenciales, superarán los obstáculos que en la actualidad impiden que las matemáticas escolares garanticen el éxito matemático para todos los estudiantes.



Referencias

ACT. *Act 2013 Profile Report: Graduating Class 2013—National.* Iowa City, Iowa: ACT, 2013.

Aguirre, Julia Maria, Karen Mayfield-Ingram, and Danny Bernard Martin. *The Impact of Identity in K–8 Mathematics Learning and Teaching: Rethinking Equity-Based Practices.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2013.

Allensworth, Elaine, Macarena Correa, and Steve Ponisciak. *From High School to the Future: ACT Preparation—Too Much, Too Late: Why ACT Scores Are Low in Chicago and What It Means for Schools*. CCSR Research Report. Chicago: Consortium on Chicago School Research (CCSR), 2008.

Allison, Elle, Laura Besser, Lauren Campsen, Juan Córdova, Brandon Doubek, Linda Gregg, Connie Kamm, et al. *Data Teams: The Big Picture Looking at Data Teams through a Collaborative Lens*. Englewood, Colo.: Lead and Learn Press, 2010.

American Diploma Project. *Ready or Not: Creating a High School Diploma That Counts*. Washington, D.C.: Achieve, 2004.

Arcavi, Abraham. "The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics." *Educational Studies in Mathematics* 52, no. 3 (2003): 215–41.

Artzt, Alice F., Eleanor Armour-Thomas, and Frances R. Curcio. *Becoming a Reflective Mathematics Teacher: A Guide for Observations and Self-Assessment*. New York: Routledge, 2011.

Ashcraft, Mark H. "Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences." *Current Directions in Psychological Science* 11, no. 5 (2002): 181–85.

Ball, Deborah Loewenberg, and Francesca M. Forzani. "Building a Common Core for Learning to Teach and Connecting Professional Learning to Practice." *American Educator* 35, no. 2 (2011): 17–21.

———. "Teaching Skillful Teaching." *Educational Leadership* 68, no. 4 (2010): 40–45.

Ball, Deborah Loewenberg, Laurie Sleep, Timothy A. Boerst, and Hyman Bass. "Combining the Development of Practice and the Practice of Development in Teacher Education." *Elementary School Journal* 109, no. 5 (2009): 458–74.

Ball, Deborah Loewenberg, Mark Hoover Thames, and Geoffrey Phelps. "Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?" *Journal of Teacher Education* 59, no. 5 (2008): 389–407.

Banilower, Eric R., Sally E. Boyd, Joan D. Pasley, and Iris R. Weiss. *Lessons from a Decade of Mathematics and Science Reform*. Chapel Hill, N.C.: Horizon Research, 2006.

Barber, Michael, and Mona Mourshed. *How the World's Best-Performing School Systems Come Out on Top*. London: McKinsey, 2007. http://www.mckinsey.com/client _service/social_sector/ latest_thinking/worlds_most_improved_ schools.aspx.

Barkatsas, Anastasios Tasos, and John Malone. "A Typology of Mathematics Teachers' Beliefs about Teaching and Learning Mathematics and Instructional Practices." *Mathematics Education Research Journal* 17, no. 2 (2005): 69–90.

Baroody, Arthur J. "Mastering the Basic Number Combinations." *Teaching Children Mathematics* 13, no. 1 (2006): 23–31.

Baroody, Arthur J., Neet Priya Bajwa, and Michael Eiland. "Why Can't Johnny Remember the Basic Facts?" *Developmental Disabilities Research Reviews* 15, no. 1 (2009): 69–79.

Battey, Dan. "'Good' Mathematics Teaching for Students of Color and Those in Poverty: The Importance of Relational Interactions within Instruction." *Educational Studies in Mathematics* 82, no. 1 (2013): 125–44.

Battista, Michael T. "Conceptualizations and Issues Related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication." *Mathematics Enthusiast* 8, no. 3 (2011): 507–70.

Berry, Robert Q., III, and Mark W. Ellis. "Multidimensional Teaching." *Mathematics Teaching in the Middle School* 19, no. 3 (2013): 172–78.

Biafora, Frank, and Ansalone, George. "Perceptions and Attitudes of School Principals towards School Tracking: Structural Considerations of Personal Beliefs." *Education* 128, no. 4 (2008): 588–602.

Black, Paul, and Dylan Wiliam. "Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment." *Phi Delta Kappan* 80, no. 1 (1998a): 139–48.

———. "Assessment and Classroom Learning." *Assessment in Education* 5, no. 1 (1998b): 7–74.

Blackwell, Lisa S., Kali H. Trzesniewski, and Carol Sorich Dweck. "Implicit Theories of Intelligence Predict Achievement across an Adolescent Transition: A Longitudinal Study and an Intervention." *Child Development* 78, no. 1 (2007): 246–63.



Blank, Rolf K., and Nina de las Alas. *Effects of Teacher Professional Development on Gains in Student Achievement: How Meta Analysis Provides Scientific Evidence Useful to Education Leaders.* Washington, D.C.: Council of Chief State School Officers, 2009.

Boaler, Jo. *Experiencing School Mathematics: Teaching Styles, Sex, and Setting*. Buckingham, UK: Open University Press, 1997.

———. "How a Detracked Mathematics Approach Promoted Respect, Responsibility, and High Achievement." *Theory into Practice* 45, no. 1 (2006): 40–46.

———. *What's Math Got to Do with It? Helping Children Learn to Love Their Least Favorite Subject—and Why It's Important for America*. New York: Penguin, 2008.

———. "Changing Students' Lives through the De-Tracking of Urban Mathematics Classrooms." *Journal of Urban Mathematics Education* 4, no. 1 (2011): 7–14.

Boaler, Jo, and Karin Brodie. "The Importance, Nature, and Impact of Teacher Questions." In *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 773–81. Toronto: Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto, 2004.

Boaler, Jo, and Megan Staples. "Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School." *Teachers College Record* 110, no. 3 (2008): 608–45.

Bransford, John D., Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking, eds. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* Expanded ed. National Research Council Committee on Developments in the Science of Learning and Committee on Learning Research and Educational Practice. Washington, D.C.: National Academy Press, 2000.

Bray, Wendy S. "How to Leverage the Potential of Mathematical Errors." *Teaching Children Mathematics* 19, no. 7 (2013): 424–31.

Burris, Carol Corbett, Jay P. Heubert, and Henry M. Levin. "Accelerating Mathematics Achievement Using Heterogeneous Grouping." *American Educational Research Journal* 43, no. 1 (2006): 137–54.

Burris, Carol Corbett, Ed Wiley, Kevin Welner, and John Murphy. "Accountability, Rigor, and Detracking: Achievement Effects of Embracing a Challenging Curriculum as a Universal Good for All Students." *Teachers College Record* 110, no. 3 (2008): 571–607.

Bush, William S., Diane J. Briars, Jere Confrey, Kathleen Cramer, Carl Lee, W. Gary Martin, Michael Mays, et al. *Common Core State Standards (CCSS) Mathematics Curriculum Materials Analysis Project*, 2011. http://www.mathedleadership.org/ccss /materials.html.

Campbell, Patricia F. "Empowering Children and Teachers in the Elementary Mathematics Classrooms of Urban Schools." *Urban Education* 30, no. 4 (1996): 449–75.

Campbell, Patricia F., and Nathaniel N. Malkus. "The Impact of Elementary Mathematics Coaches on Student Achievement." *Elementary School Journal* 111, no. 3 (2011): 430–54.

Carpenter, Thomas P., Elizabeth Fennema, Megan Loef Franke, Linda Levi, and Susan B. Empson. *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, N.H.: Heinemann, 1999.

Carpenter, Thomas P., Elizabeth Fennema, Penelope L. Peterson, Chi-Pang Chiang, and Megan Loef. "Using Knowledge of Children's Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study." *American Educational Research Journal* 26 (Winter 1989): 499–531.

Carpenter, Thomas P., Megan Loef Franke, and Linda Levi. *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary Schools*. Portsmouth, N.H.: Heinemann, 2003.

Carter, Susan. "Disequilibrium and Questioning in the Primary Classroom: Establishing Routines That Help Students Learn." *Teaching Children Mathematics* 15, no. 3 (2008): 134–37.

Chamberlin, Michelle T. "Teachers' Discussions of Students' Thinking: Meeting the Challenge of Attending to Students' Thinking." *Journal of Mathematics Teacher Education* 8, no. 2 (2005): 141–70.

Chapin, Suzanne H., and Catherine O'Connor. "Academically Productive Talk: Supporting Students' Learning in Mathematics." In *The Learning of Mathematics*, Sixty-ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by W. Gary Martin and Marilyn Strutchens, pp. 113–39. Reston, Va.: NCTM, 2007.

Charles, Randall I. "Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics." *Journal of Mathematics Education Leadership* 7, no. 1 (2005): 9–24.

Cheng, Kai-ming. "Shanghai: How a Big City in a Developing Country Leaped to the Head of the Class." In *Surpassing Shanghai: An Agenda*



for American Education Built on the World's Leading Systems, edited by Marc S. Tucker, pp. 21–50. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 2011.

Clarke, Shirley. *Enriching Feedback in the Primary Classroom*. London: Hodder and Stoughton, 2003.

Clarke, Shirley, Helen Timperley, and John Hattie. *Unlocking Formative Assessment: Practical Strategies for Enhancing Students' Learning in the Primary and Intermediate Classroom*. Auckland, New Zealand: Hodder Moa Beckett, 2004.

Clements, Douglas H., and Julie Sarama. "Learning Trajectories in Mathematics Education." *Mathematical Thinking and Learning* 6, no. 2 (2004): 81–89.

Cohen, Jessica, and Karen F. Hollebrands. "Technology Tools to Support Mathematics Teaching." In *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making*, edited by Thomas P. Dick and Karen F. Hollebrands, pp. 105–22. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

College Board. *College Board Standards for College Success: Mathematics and Statistics*. New York: College Board, 2006.

———. *2013 College-Bound Seniors: Total Group Profile Report*. New York: College Board, 2013a.

———. *2013 SAT Report on College and Career Readiness*. New York: College Board, 2013c.

———. *Student Score Distributions: AP Exams May 2013*. New York: College Board, 2013b. http://media.collegeboard.com/digitalServices/pdf/research/2013/STUDENT -SCORE-DISTRIBUTIONS-2013.pdf.

Collins, Jim. *Good to Great: Why Some Companies Make the Leap … and Others Don't*. New York: HarperCollins, 2001.

Common Core State Standards Writing Team. "Progressions Documents for the Common Core Math Standards" (drafts, Institute for Mathematics and Education, University of Arizona, Tucson, 2013). http://ime.math.arizona.edu
/progressions/.

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). *The Mathematical Education of Teachers II.* Providence, R.I.: American Mathematical Society; Washington D.C.: Mathematical Association of America, 2012.

Crespo, Sandra. "Seeing More than Right and Wrong Answers: Prospective Teachers' Interpretations of Students' Mathematical Work." *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, no. 2 (2000): 155–81.

Crespo, Sandra, Andreas O. Kyriakides, and Shelly McGee. "Nothing Basic about Basic Facts." *Teaching Children Mathematics* 12, no. 2 (2005): 61–67.

Cross, D. I., R. A. Hudson, O. Adefope, M. Y. Lee, L. Rapacki, and A. Perez. "Success Made Probable: African-American Girls' Exploration in Statistics through Project-Based Learning." *Journal of Urban Mathematics Education* 5, no. 2 (2012): 55–86.

Darling-Hammond, Linda. "Third Annual Brown Lecture in Education Research—The Flat Earth and Education: How America's Commitment to Equity Will Determine Our Future." *Educational Researcher* 36, no. 6 (2007): 318–34.

Daro, Phil, Frederic A. Mosher, and Tom Corcoran. *Learning Trajectories in Mathematics: A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction.* Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education, 2011.

David, Jane D., and David Greene. *Improving Mathematics Instruction in Los Angeles High Schools: An Evaluation of the PRISMA Pilot Program*. Palo Alto, Calif.: Bay Area Research Group, 2007.

Delcourt, Marcia A. B., Brenda H. Loyd, Dewey G. Cornell, and Marc D. Goldberg. *Evaluation of the Effects of Programming Arrangements on Student Learning Outcomes*. Charlottesville, Va.: University of Virginia, 1994.

DeMonte, Jenny. *High-Quality Professional Development for Teachers: Supporting Teacher Training to Improve Student Learning.* Washington, D.C.: Center for American Progress, 2013.

Dick, Thomas P., and Karen F. Hollebrands. *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Dieker, Lisa A., Paula Maccini, Tricia K. Strickland, and Jessica H. Hunt. "Minimizing Weaknesses and Maximizing Strengths of Students with Disabilities." In *Focus in High School Mathematics: Fostering Reasoning and Sense Making for All Students*, edited by Marilyn E.



Strutchens and Judith Reed Quander, pp. 37–63. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Ding, Meixia, and Mary Alice Carlson. "Elementary Teachers' Learning to Construct High-Quality Mathematics Lesson Plans: A Use of IES Recommendations." *Elementary School Journal* 113, no. 3 (2013): 359–75.

Doerr, Helen M., Lynn T. Goldsmith, and Catherine C. Lewis. *Mathematics Professional Development Brief.* NCTM Research Brief. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2010.

Donovan, M. Suzanne, and John D. Bransford, eds. *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom*. National Research Council, Committee on *How People Learn*: *A Targeted Report for Teachers*. Washington, D.C.: National Academies Press, 2005.

Dubinsky, Ed, and Robin T. Wilson. "High School Students' Understanding of the Function Concept." *The Journal of Mathematical Behavior* 32, no. 1 (2013): 83–101.

DuFour, Richard, Rebecca DuFour, Robert Eaker, and Thomas Many. *Learning by Doing: A Handbook for Professional Learning Communities at Work*. Bloomington, Ind.: Solution Tree Press, 2006.

Duit, Reinders, and David F. Treagust. "Conceptual Change: A Powerful Framework for Improving Science Teaching and Learning." *International Journal of Science Education* 25, no. 6 (2003): 671–88.

Dweck, Carol. *Mindset: The New Psychology of Success*. New York: Random House, 2006.

———. *Mindsets and Math/Science Achievement*. New York: Carnegie Corporation of New York Institute for Advanced Study, 2008.

Ellis, Mark. "Leaving No Child Behind Yet Allowing None Too Far Ahead: Ensuring (In)Equity in Mathematics Education through the Science of Measurement and Instruction." *Teachers College Record* 110, no. 6 (2008): 1330–56.

Ellis, Mark, and Robert Q. Berry III. "The Paradigm Shift in Mathematics Education: Explanations and Implications of Reforming Conceptions of Teaching and Learning." *The Mathematics Educator* 15, no. 1 (2005): 7–17.

Engle, Randi A., and Faith C. Conant. "Guiding Principles for Fostering Productive Disciplinary Engagement: Explaining an Emergent Argument in a Community of Learners Classroom." *Cognition and Instruction* 20, no. 4 (2002): 399–483.

Erlwanger, Stanley H. "Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics." In *Classics in Mathematics Education Research*, edited by Thomas P. Carpenter, John A. Dossey, and Julie L. Koehler, pp. 48–58. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2004.

Fernandez, Clea, and Makoto Yoshida. *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, N.J.: Erlbaum, 2004.

Ferrini-Mundy, Joan, Karen Graham, Loren Johnson, and Geoffrey Mills. *Making Change in Mathematics Education: Learning from the Field*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.

Flores, Alfinio. "Examining Disparities in Mathematics Education: Achievement Gap or Opportunity Gap?" *High School Journal* 91, no. 1 (2007): 29–42.

Fosnot, Catherine Twomey, and William Jacob. *Young Mathematicians at Work: Constructing Algebra*. Portsmouth, N.H.: Heinemann, 2010.

Franke, Meghan, Noreen M. Webb, Angela Chan, Dan Battey, Marsha Ing, Deanna Freund, and Tondra De. *Eliciting Student Thinking in Elementary School Mathematics Classrooms*. CRESST Report 725. Los Angeles: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing, 2007.

Franklin, Christine, Gary Kader, Denise Mewborn, Jerry Moreno, Roxy Peck, Mike Perry, and Richard Scheaffer. *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K Curriculum Framework.* Alexandria, Va.: American Statistical Association, 2007.

Fuson, Karen C. "Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division." *Teaching Children Mathematics* 9, no. 6 (2003): 300–305.

Fuson, Karen C., and Sybilla Beckmann. "Standard Algorithms in the Common Core State Standards." *National Council of Supervisors of Mathematics Journal of Mathematics Education Leadership* 14, no. 1 (2012/2013): 14–30.

Fuson, Karen C., Mindy Kalchman, and John D. Bransford. "Mathematical Understanding: An Introduction." In *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom*, edited by M. Suzanne Donovan and John D. Bransford, Committee on How People Learn: A Targeted Report for Teachers, National Research Council, pp. 217–56. Washington, D.C.: National Academies Press, 2005.



Fuson, Karen C., and Aki Murata. "Integrating NRC Principles and the NCTM Process Standards to Form a Class Learning Path Model That Individualizes within Whole-Class Activities." *National Council of Supervisors of Mathematics Journal of Mathematics Education Leadership* 10, no. 1 (2007): 72–91.

Gamoran, Adam. "Tracking and Inequality: New Directions for Research and Practice." In *The Routledge International Handbook of the Sociology of Education*, edited by Michael W. Apple, Stephen J. Ball, and Luis Armando Gandin, pp. 213–28. New York: Routledge, 2010.

Garet, Michael S., Andrew J. Wayne, Fran Stancavage, James Taylor, Kirk Walters, Mengli Song, Seth Brown, et al. *Middle School Mathematics Professional Development Impact Study: Findings after the First Year of Implementation.* NCEE 2010-4009. Washington, D.C.: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, 2010.

Gawande, Atul. "Annals of Medicine: Personal Best: Top Athletes and Singers Have Coaches, Should You?" *New Yorker.* October 3, 2011, 44–53.

Goodwin, Bryan, and Kirsten Miller. "Evidence on Flipped Classrooms Is Still Coming In." *Educational Leadership* 70, no. 6 (2013): 78–80.

Greeno, James G., and Rogers P. Hall. "Practicing Representation." *Phi Delta Kappan* 78, no. 5 (1997): 361–67.

Griffin, Sharon. "Laying the Foundation for Computational Fluency in Early Childhood." *Teaching Children Mathematics* 9, no. 6 (2003): 306–9.

———. "Fostering the Development of Whole-Number Sense: Teaching Mathematics in the Primary Grades." In *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom*, edited by M. Suzanne Donovan and John D. Bransford, Committee on How People Learn: A Targeted Report for Teachers, National Research Council, pp. 257–308. Washington, D.C.: National Academies Press, 2005.

Grossman, Pam, Karen Hammerness, and Morva McDonald. "Redefining Teaching, Reimagining Teacher Education." *Teachers and Teaching: Theory and Practice* 15, no. 2 (2009): 273–89.

Gutiérrez, Rochelle. "Advancing African-American Urban Youth in Mathematics: Unpacking the Success of One Math Department." *American Journal of Education* 109, no. 1 (2000): 63–111.

———. "Enabling the Practice of Mathematics Teachers in Context: Towards a New Equity Research Agenda." *Mathematical Thinking and Learning* 4, no. 2/3 (2002): 145–87.

———. “The Sociopolitical Turn in Mathematics Education.” *Journal for Research in Mathematics Education* 44, no. 1 (2013): 37–68.

Haladyna, Thomas M., and Steven M. Downing. “A Taxonomy of Multiple-Choice Item-Writing Rules.” *Applied Measurement in Education* 2, no. 1 (1989): 37–50.

Handal, Boris. “Teachers’ Mathematical Beliefs: A Review.” *Mathematics Educator* 13, no. 2 (2003): 47–57.

Hattie, John A. C. *Visible Learning: A Synthesis of over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement.* New York: Routledge, 2009.

———. *Visible Learning for Teachers: Maximizing Impact on Learning.* New York: Routledge, 2012.

Hattie, John, and Helen Timperley. “The Power of Feedback.” *Review of Educational Research* 77, no. 1 (2007): 81–112.

Haystead, Mark W., and Robert J. Marzano. *Meta-Analytic Synthesis of Studies Conducted at Marzano Research Laboratory on Instructional Strategies*. Englewood, Colo.: Marzano Research Laboratory, 2009.

Herbel-Eisenmann, Beth A., and M. Lynn Breyfogle. “Questioning Our Patterns of Questioning.” *Mathematics Teaching in the Middle School* 10, no. 9 (2005): 484–89.

Heritage, Margaret. *Learning Progressions: Supporting Instruction and Formative Assessment*. Washington, D.C.: Council of Chief State School Officers, 2008.

Herman, Joan, and Robert Linn. *On the Road to Assessing Deeper Learning: The Status of Smarter Balanced and PARCC Assessment Consortia*. CRESST Report 823. Los Angeles: University of California, National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST), 2013.

Hiebert, James, Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, Karen C. Fuson, Diana Wearne, Hanlie Murray, Alwyn Olivier, and Piet Human. *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding.* Portsmouth, N.H.: Heinemann, 1997.

Hiebert, James, Ronald Gallimore, Helen Garnier, Karen Bogard Givvin, Hilary Hollingsworth, Jennifer Jacobs, Angel Miu-Ying Chui, et al. *Highlights from the TIMSS 1999 Video Study of Eighth-Grade Mathematics Teaching.* Washington, D.C.: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, 2003.



Hiebert, James, and Douglas A. Grouws. "The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning." In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Frank K. Lester, Jr., pp. 371–404. Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

Hiebert, James, Anne K. Morris, Dawn Berk, and Amanda Jansen. "Preparing Teachers to Learn from Teaching." *Journal of Teacher Education* 58, no. 1 (2007): 47–61.

Hiebert, James, and James W. Stigler. "A World of Difference." *Journal of Staff Development* 25, no. 4 (2004): 10–15.

Hiebert, James, and Diana Wearne. "Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic." *American Educational Research Journal* 30, no. 2 (1993): 393–425.

Hill, Heather C., Merrie L. Blunk, Charalambos Y. Charalambous, Jennifer M. Lewis, Geoffrey C. Phelps, Laurie Sleep, and Deborah Loewenberg Ball. "Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study." *Cognition and Instruction* 26, no. 4 (2008): 430–511.

Hill, Heather C., Brian Rowan, and Deborah Loewenberg Ball. "Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement." *American Educational Research Journal* 42, no. 2 (2005): 371–406.

Hlas, Anne Cummings, and Christopher S. Hlas. "A Review of HighLeverage Teaching Practices: Making Connections between Mathematics and Foreign Languages." *Foreign Language Annals* 45, no. s1 (2012): s76–s97.

Hogan, Maureen P. "The Tale of Two Noras: How a Yup'ik Middle Schooler Was Differently Constructed as a Math Learner." *Diaspora, Indigenous, and Minority Education* 2, no. 2 (2008): 90–114.

Horn, Ilana. *Strength in Numbers: Collaborative Learning in Secondary Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2012.

Hoy, Wayne K., C. John Tarter, and Anita Woolfolk Hoy. "Academic Optimism of Schools: A Force for Student Achievement." *American Educational Research Journal* 43, no. 3 (2006): 425–46.

Hufferd-Ackles, Kimberly, Karen C. Fuson, and Miriam Gamoran Sherin. "Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community." *Journal for Research in Mathematics Education* 35, no. 2 (2004): 81–116.

———. “Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community.” In *Lessons Learned from Research*, edited by Edward A. Silver and Patricia A. Kenney. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2014.

Huinker, DeAnn. “Dimensions of Fraction Operation Sense.” In *Defining Mathematics Education: Presidential Yearbook Selections 1926–2012,* Seventy-fifth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), pp. 373-380. Reston, Va.: NCTM, 2013.

Hull, Ted H., Don S. Balka, and Ruth Harbin Miles. *A Guide to Mathematics Coaching: Processes for Increasing Student Achievement*. Thousand Oaks, Calif.: Corwin, 2009.

Isaacs, Andrew C., and William M. Carroll. “Strategies for Basic-Facts Instruction.” *Teaching Children Mathematics* 5, no. 9 (1999): 508–15.

Jackson, Kara, Anne Garrison, Jonee Wilson, Lynsey Gibbons, and Emily Shahan. “Exploring Relationships between Setting Up Complex Tasks and Opportunities to Learn in Concluding Whole-Class Discussions in Middle-Grades Mathematics Instruction.” *Journal for Research in Mathematics Education* 44, no. 4 (2013): 646–82.

Jacobs, Victoria R., and Rebecca C. Ambrose. “Making the Most of Story Problems.” *Teaching Children Mathematics* 15, no. 5 (2008): 260–66.

Jacobs, Victoria R., Lisa L. C. Lamb, and Randolph A. Philipp. “Professional Noticing of Children’s Mathematical Thinking.” *Journal for Research in Mathematics Education* 41, no. 2 (2010): 169–202.

Kanold, Timothy D., and Matthew R. Larson. *Common Core Mathematics in a PLC at Work: Leader’s Guide*. Bloomington, Ind.: Solution Tree Press; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2012.

Kapur, Manu. “Productive Failure in Mathematical Problem Solving.” *Instructional Science* 38, no. 6 (2010): 523–50.

Keck, Heidi, and Johnny Lott. “Integrated Mathematics through Mathematical Modeling.” In *Integrated Mathematics: Choices and Challenges*, edited by Sue Ann McGraw, pp. 131–140. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

Kisker, Ellen Eliason, Jerry Lipka, Barbara L. Adams, Anthony Rickard, Dora Andrew- Ihrke, Eva Evelyn Yanez, and Ann Millard. “The Potential of a Culturally-Based Supplemental Math Curriculum to Reduce the Math Performance Gap between Alaska Native and Other Students.” *Journal for Research in Mathematics Education* 43, no. 1 (2012): 75–113.



Knapp, Michael S., Nancy E. Adelman, Camille Marder, Heather McCollum, Margaret C. Needels, Christine Padillia, Patrick M. Shields, Brenda J. Turnbull, and Andrew A. Zucker. *Teaching for Meaning in High-Poverty Schools*. New York: Teachers College Press, 1995.

Knight, Jim. *Instructional Coaching: A Partnership Approach to Improving Instruction.* Thousand Oaks, Calif.: Corwin, 2007.

Korthagen, Fred A. J., and Angelo Vasalos. "Going to the Core: Deepening Reflection by Connecting the Person to the Profession." In *Handbook of Reflection and Reflective Inquiry: Mapping a Way of Knowing for Professional Reflective Inquiry*, edited by Nona Lyons, pp. 529–52. New York: Springer, 2010.

Lampert, Magdalene. "Learning Teaching in, from, and for Practice: What Do We Mean?" *Journal of Teacher Education* 61, no. 1/2 (2010): 21–34.

Leahy, Siobhan, Christine Lyon, Marnie Thompson, and Dylan Wiliam. "Classroom Assessment: Minute by Minute, Day by Day." *Educational Leadership* 63, no. 3 (2005): 18–24.

Lesh, Richard, Tom Post, and Merlyn Behr. "Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving." In *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, edited by Claude Janvier, pp. 33–40. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1987.

Lester, Frank K., Jr., ed. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

Lewis, Catherine. *Lesson Study: A Handbook of Teacher-Led Instructional Change.* Philadelphia: Research for Better Schools, 2002.

Lipka, Jerry, Nancy Sharp, Barbara Adams, and Ferdinand Sharp. "Creating a Third Space for Authentic Biculturalism: Examples from Math in a Cultural Context." *Journal of American Indian Education* 46, no. 3 (2007): 94–115.

Lubienski, Sarah Theule. "Research, Reform and Equity in U.S. Mathematics Education." In *Improving Access to Mathematics: Diversity and Equity in the Classroom*, edited by Na'ilah Suad Nasir and Paul Cobb, pp. 10–23. New York: Teachers College Press, 2006.

Ma, Liping. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* 2nd ed. New York: Routledge, 2010.

Marshall, Anne Marie, Alison Castro Superfine, and Reality S. Canty. "Star Students Make Connections." *Teaching Children Mathematics* 17, no. 1 (2010): 39–47.

Martin, Danny Bernard. "Hidden Assumptions and Unaddressed Questions in Mathematics for ALL Rhetoric." *Mathematics Educator* 13, no. 2 (2003): 7–21.

Martin, W. Gary. "The NCTM High School Curriculum Project: Why It Matters to You." *Mathematics Teacher* 103, no. 3 (2009): 164–66.

Martin, W. Gary, Marilyn E. Strutchens, Stephen Stuckwisch, and Mohammed Qazi. "Transforming East Alabama Mathematics (TEAM-Math): Promoting Systemic Change in Schools and Universities." In *Disrupting Tradition: Research and Practice Pathways in Mathematics Education*, edited by William F. Tate, Karen D. King, and Celia Rousseau Anderson, pp. 105–18. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Marzano, Robert J. *What Works in Schools: Translating Research into Action*. Alexandria, Va.: Association of Supervision and Curriculum Development, 2003.

———. *Designing and Teaching Learning Goals and Objectives: Classroom Strategies That Work*. Bloomington, Ind.: Marzano Research Laboratory, 2009.

Marzano, Robert J., Tina Boogren, Tammy Heflebower, Jessica Kanold-McIntyre, and Debra Pickering. *Becoming a Reflective Teacher*. Bloomington, Ind.: Marzano Research Laboratory, 2012.

Mathematical Sciences Research Institute (MSRI). *Teaching Teachers Mathematics: Research, Ideas, Projects, Evaluation*. Cathy Kessel, ed. Critical Issues in Mathematics Education, vol. 3. Berkeley, Calif.: MSRI, 2009.

Mayer, Richard E. "Rote versus Meaningful Learning." *Theory into Practice* 41, no. 4 (2002): 226–32.

McDonald, Morva, Elham Kazemi, and Sarah Schneider Kavanagh. "Core Practices and Pedagogies of Teacher Education: A Call for a Common Language and Collective Activity." *Journal of Teacher Education* 64, no. 5 (2013): 378–86.

McGatha, Maggie. *Mathematics Specialists and Mathematics Coaches: What Does the Research Say?* NCTM Research Brief. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2009.



McKenzie, Kathryn Bell, Linda Skrla, James Joseph Scheurich, Delores Rice, and Daniel P. Hawes. "Math and Science Academic Success in Three Large, Diverse, Urban High Schools: A Teachers' Story." *Journal of Education for Students Placed at Risk* 16, no. 2 (2011): 100–21.

McTighe, Jay, and Grant P. Wiggins. *Essential Questions: Opening Doors to Student Understanding*. Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development, 2013.

Mehan, Hugh. *Learning Lessons: Social Organization in the Classroom*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1979.

Michaels, Sarah, Mary Catherine O'Connor, and Lauren Resnick. "Deliberative Discourse Idealized and Realized: Accountable Talk in the Classroom and in Civic Life." *Studies in Philosophy and Education* 27, no. 4 (2008): 283–97.

Middleton, James A., and Amanda Jansen. *Motivation Matters and Interest Counts: Fostering Engagement in Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Moller, Stephanie, Roslyn Arlin Mickelson, Elizabeth Stearns, Neena Banerjee, and Martha Cecilia Bottia. "Collective Pedagogical Teacher Culture and Mathematics Achievement Differences by Race, Ethnicity, and Socioeconomic Status." *Sociology of Education* 86, no. 2 (2013): 174–94.

Morris, Anne K., James Hiebert, and Sandy M. Spitzer. "Mathematical Knowledge for Teaching in Planning and Evaluating Instruction: What Can Preservice Teachers Learn?" *Journal for Research in Mathematics Education* 40, no. 5 (2009): 491–29.

Moschkovich, Judit N. "Understanding the Needs of Latino Students in Reform-Oriented Mathematics Classrooms." In *Changing the Faces of Mathematics: Perspectives on Latinos*, edited by Luis Ortiz-Franco, Norma G. Hernández, and Yolanda de la Cruz, pp. 5–12. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

———. "Supporting Mathematical Reasoning and Sense Making for English Learners." In *Focus in High School Mathematics: Fostering Reasoning and Sense Making for All Students*, edited by Marilyn E. Strutchens and Judith Reed Quander, pp. 17–36. Reston, Va.: NCTM, 2011.

National Center for Education Statistics (NCES). *NAEP 2008: Trends in Academic Progress.* NCES 2009–479. Washington, D.C.: NCES, 2009.

———. *A First Look: 2013 Mathematics and Reading.* NCES 2014-451. Washington, D.C.: NCES, 2013.

———. Reports generated by using the NAEP Data Explorer. Washington, D.C.: NCES, 2014. http://nces.ed.gov/nationsreportcard/naepdata/.

National Center on Education and the Economy (NCEE) and the University of Pittsburgh. *New Standards Performance Standards: English Language Arts, Mathematics, Science, Applied Learning,* Vol. 2, *Middle School*. Washington, D.C.: NCEE; Pittsburgh, Pa.: University of Pittsburgh, 1997.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1989.

———. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1991.

———. *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1995.

———. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 2000.

———. *Mathematics Teaching Today: Improving Practice, Improving Student Learning,* 2nd ed. Updated, revised version of *Professional Standards for Teaching Mathematics* (NCTM 1991), edited by Tami S. Martin. Reston, Va.: NCTM, 2007.

———. *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making.* Reston, Va.: NCTM, 2009.

———. *Technology in Teaching and Learning Mathematics.* NCTM Position Statement, 2011. http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=6330.

———. *Supporting the Common Core State Standards for Mathematics.* NCTM Position Statement, 2013. http://www.nctm.org/ccssmposition.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (NGA Center and CCSSO). *Common Core State Standards for Mathematics. Common Core State Standards (College- and Career-Readiness Standards and K–12 Standards in English Language Arts and Math).* Washington, D.C.: NGA Center and CCSSO, 2010. http://www.corestandards.org.

———. *K–8 Publishers' Criteria for the Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C.: NGA Center and CCSSO, 2013. http://www.corestandards.org /assets/Math_Publishers_Criteria_K-8_Summer%202012_FINAL.pdf.



National Mathematics Advisory Panel (NMAP). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, D.C.: U.S. Department of Education, 2008.

National Research Council. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford, and Bradford Findell, eds., Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, D.C.: National Academy Press, 2001.

———. *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity.* Christopher T. Cross, Taniesha A. Woods, and Heidi Schweingruber, eds., Committee on Early Childhood Mathematics, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, D.C.: National Academies Press, 2009.

———. *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century.* James W. Pellegrino and Margaret L. Hilton, eds., Committee on Defining Deeper Learning and 21st Century Skills, Board on Testing and Assessment and Board on Science Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, D.C.: National Academies Press, 2012a.

———. *A Framework for K–12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas*. Washington, D.C.: National Academies Press, 2012b.

———. *The Mathematical Sciences in 2025.* Washington, D.C.: National Academies Press, 2013a.

———. *Next Generation Science Standards: For States, by States*. Washington, D.C.: National Academies Press, 2013b.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). *Lessons from PISA 2012 for the United States, Strong Performers and Successful Reformers in Education*. Paris: OECD, 2013b. http://dx.doi.org/10.1787/9789264207585-en.

———. *PISA 2012 Results in Focus: What 15-Year-Olds Know and What They Can Do with What They Know*. Paris: OECD, 2013a.

Orlich, Donald C. "Education Reform and Limits to Student Achievement." *Phi Delta Kappan* 81, no. 6 (2000): 468–72.

Otto, Albert Dean, Janet H. Caldwell, Cheryl Ann Lubinski, and Sarah Wallus Hancock. *Developing Essential Understanding of Multiplication and Division for Teaching Mathematics in Grades 3–5*. Essential Understanding Series. Reston, Va.: NCTM, 2011.

Pape, Stephen J., and Mourat A. Tchoshanov. “The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding.” *Theory into Practice* 40, no. 2 (2001): 118–27.

Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers (PARCC). TV Sales prototype task, 2013. http://www.ccsstoolbox.com/parcc/PARCCPrototype_main.html.

Pashler, Harold, Patrice M. Bain, Brian A. Bottge, Arthur Graesser, Kenneth Koedinger, Mark McDaniel, and Janet Metcalfe. *Organizing Instruction and Study to Improve Student Learning.* IES Practice Guide (NCER 2007-2004). Washington, D.C.: National Center for Education Research, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, 2007. http://ncer.ed.gov.

Perry, Angela. *The Data Teams Experience: A Guide for Effective Meetings.* Englewood, Colo.: Advanced Learning Press, 2011.

Phelps, Geoffrey, Douglas Corey, Jenny DeMonte, Delena Harrison, and Deborah Loewenberg Ball. “How Much English Language Arts and Mathematics Instruction Do Students Receive? Investigating Variation in Instructional Time.” *Educational Policy* 26, no. 5 (2012): 631–62.

Philipp, Randolph A. “Mathematics Teachers’ Beliefs and Affect.” In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Frank K. Lester, Jr., pp. 257–315. Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

Planas, Núria, and Marta Civil. “Language-as-Resource and Language-as-Political: Tensions in the Bilingual Mathematics Classroom.” *Mathematics Education Research Journal* 25, no. 3 (2013): 361–78.

Popham, W. James. *Transformative Assessment.* Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development, 2008.

Ramirez, Gerardo, Elizabeth A. Gunderson, Susan C. Levine, and Sian L. Beilock. “Math Anxiety, Working Memory, and Math Achievement in Early Elementary School.” *Journal of Cognition and Development* 14, no. 2 (2013): 187–202.

Rathmell, Edward C. *Basic Facts: Questions, Answers, and Comments.* Cedar Falls, Iowa: Thinking with Numbers, 2005. http://www.thinkingwithnumbers.com.

Razfar, Aria, Lena Lecón Khisty, and Kathryn Chval. (2011). “Re-mediating Second Language Acquisition: A Sociocultural Perspective for Language Development.” *Mind, Culture, and Activity* 18, no. 3: 195–215.



Reeves, Douglas B. *Elements of Grading: A Guide to Effective Practices*. Bloomington, Ind.: Solution Tree Press, 2011.

Reinhart, Steven C. "Never Say Anything a Kid Can Say!" *Mathematics Teaching in the Middle School* 5, no. 8 (2000): 478–83.

Robinson, Keith. "Early Disparities in Mathematics Gains among Poor and Non-Poor Children." *Elementary School Journal* 114, no. 1 (2013): 22–47.

Rohrer, Doug. "The Effects of Spacing and Mixed Practice Problems." *Journal for Research in Mathematics Education* 40, no. 1 (2009): 4–17.

Rohrer, Doug, and Kelli Taylor. "The Shuffling of Mathematics Problems Improves Learning." *Instructional Science* 35, no. 6 (2007): 481–98.

Ronau, Robert N., Christopher R. Rakes, Sarah B. Bush, Shannon Driskell, Margaret L. Niess, and David Pugalee. *Using Calculators for Teaching and Learning Mathematics.* NCTM Research Brief. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=8468.

Roschelle, Jeremy, Nicole Shechtman, Deborah Tatar, Stephen Hegedus, Bill Hopkins, Susan Empson, Jennifer Knudsen, and Lawrence P. Gallagher. "Integration of Technology, Curriculum, and Professional Development for Advancing Middle School Mathematics: Three Large-Scale Studies." *American Educational Research Journal* 47, no. 4 (2010): 833–78.

Rubin, Beth C., and Pedro A. Noguera. "Tracking Detracking: Sorting through the Dilemmas and Possibilities of Detracking in Practice." *Equity and Excellence in Education* 37, no. 1 (2004): 92–101.

Russell, Susan Jo. "Developing Computational Fluency with Whole Numbers." *Teaching Children Mathematics* 7, no. 3 (2000): 154–58.

Sam, Lim Chap, and Paul Ernest. "A Survey of Public Images of Mathematics." *Research in Mathematics Education* 2, no. 1 (2000): 193–206.

Sarama, Julie, and Douglas H. Clements. "'Concrete' Computer Manipulatives in Mathematics Education." *Child Development Perspectives* 3, no. 3 (2009): 145–50.

Schifter, Deborah. "Learning to See the Invisible: What Skills and Knowledge Are Needed to Engage with Students' Mathematical Ideas?" In *Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics*, edited by Terry Wood, Barbara S. Nelson, and Janet Warfield, pp. 109–34. Mahwah, N.J.: Erlbaum, 2001.

Schmidt, William H., Leland S. Cogan, and Richard T. Houang. "Equality of Educational Opportunity: Myth or Reality in U.S. Schooling?" *American Educator* 34, no. 4 (2011): pp. 12–19.

Schmidt, William H., Richard T. Houang, and Leland S. Cogan. "A Coherent Curriculum: The Case of Mathematics." *American Educator* 26, no. 2 (2002): 10–26; 47–48.

Schmoker, Michael J. *Results Now: How We Can Achieve Unprecedented Improvements in Teaching and Learning.* Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development, 2006.

Scholastic and the Bill & Melinda Gates Foundation. *Primary Sources: 2012—America's Teachers on the Teaching Profession*. New York: Scholastic, 2012.

Schunk, Dale H., and Kerry Richardson. "Motivation and Self-Efficacy in Mathematics Education." In *Motivation and Disposition: Pathways to Learning Mathematics*, edited by Daniel J. Brahier, pp. 13–30. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Seeley, Cathy L. *Faster Isn't Smarter: Messages about Math, Teaching, and Learning in the 21st Century.* Sausalito, Calif.: Math Solutions, 2009.

Seidle, Tina, Rolf Rimmele, and Manfred Prenzel. "Clarity and Coherence of Lesson Goals as a Scaffold for Student Learning." *Learning and Instruction* 15, no. 6 (2005): 539–56.

Sherin, Miriam Gamoran, and Elizabeth A. van Es. "A New Lens on Teaching: Learning to Notice." *Mathematics Teaching in the Middle School* 9, no. 2 (2003): 92–95.

Sleep, Laurie, and Timothy A. Boerst. "Preparing Beginning Teachers to Elicit and Interpret Students' Mathematical Thinking." *Teaching and Teacher Education* 28, no. 7 (2012): 1038–48.

Smith, Margaret S. "Reflections on Practice: Redefining Success in Mathematics Teaching and Learning." *Mathematics Teaching in the Middle School* 5, no. 6 (2000): 378–82, 386.

Smith, Margaret S., Edward A. Silver, Mary Kay Stein, Melissa Boston, and Marjorie A. Henningsen. *Improving Instruction in Rational Numbers and Proportionality: Using Cases to Transform Mathematics Teaching and Learning.* Vol. 1. New York: Teachers College Press, 2005.

Smith, Margaret S., and Mary Kay Stein. *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

———. "Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School* 3, no. 5 (1998): 344–49.



Staples, Megan E. "Promoting Student Collaboration in a Detracked, Heterogeneous Secondary Mathematics Classroom." *Journal of Mathematics Teacher Education* 11, no. 5 (2008): 349–71.

Stein, Mary Kay, Barbara W. Grover, and Marjorie Henningsen. "Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms." *American Educational Research Journal* 33, no. 2 (1996): 455–88.

Stein, Mary Kay, and Suzanne Lane. "Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project." *Educational Research and Evaluation* 2, no. 1 (1996): 50-80.

Stein, Mary K., Janine Remillard, and Margaret S. Smith. "How Curriculum Influences Student Learning." In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Frank K. Lester, Jr., pp. 319–69. Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

Stein, Mary Kay, Jennifer Russell, and Margaret Schwan Smith. "The Role of Tools in Bridging Research and Practice in an Instructional Improvement Effort." In *Disrupting Tradition: Research and Practice Pathways in Mathematics Education*, edited by William F. Tate, Karen D. King, and Celia Rousseau Anderson, pp. 33–44. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Stein, Mary Kay, and Margaret S. Smith. "Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School* 3, no. 4 (1998): 268–75.

Stein, Mary Kay, Margaret S. Smith, Marjorie Henningsen, and Edward A. Silver. *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction: A Casebook for Professional Development*. 2nd ed. New York: Teachers College Press, 2009.

Stiff, Lee V., Janet L. Johnson, and Patrick Akos. "Examining What We Know for Sure: Tracking in Middle Grades Mathematics." In *Disrupting Tradition: Research and Practice Pathways in Mathematics Education*, edited by William Tate, Karen King, and Celia Rousseau Anderson, pp. 63–75. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

Stiggins, Rick. "Assessment through the Student's Eyes." *Educating the Whole Child* 64, no. 8 (2007): 22–26.

Stigler, James W., and James Hiebert. *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: Simon and Schuster, 1999.

———. “Improving Mathematics Teaching.” *Educational Leadership* 61, no. 5 (2004): 12–16.

Stigler, James W., and Belinda J. Thompson. “Thoughts on Creating, Accumulating, and Utilizing Shareable Knowledge to Improve Teaching.” *Elementary School Journal* 109, no. 5 (2009): 442–57.

Stylianou, Despina A., and Edward A. Silver. “The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences.” *Mathematical Thinking and Learning* 6, no. 4 (2004): 353–87.

Swan, Malcolm. “Dealing with Misconceptions in Mathematics.” In *Issues in Mathematics Teaching*, edited by Peter Gates, pp. 147–65. New York: Routledge, 2001.

Sztajn, Paola, Jere Confrey, P. Holt Wilson, and Cynthia Edgington. “Learning Trajectory Based Instruction: Toward a Theory of Teaching.” *Educational Researcher* 41, no. 5 (2012): 147–56.

Tarr, James E., Óscar Chávez, Robert E. Reys, and Barbara J. Reys. “From the Written to the Enacted Curricula: The Intermediary Role of Middle School Mathematics Teachers in Shaping Students’ Opportunity to Learn.” *School Science and Mathematics* 106, no. 4 (2006): 191–201.

Tate, William F., and Celia Rousseau. “Access and Opportunity: The Political and Social Context of Mathematics Education.” In *Handbook of International Research in Mathematics Education*, edited by Lyn D. English, pp. 271–99. Mahwah, N.J.: Erlbaum, 2002.

Thornton, Carol A. “Emphasizing Thinking Strategies in Basic Fact Instruction.” *Journal for Research in Mathematics Education* (1978): 214–27.

Tripathi, Preety N. “Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations.” *Mathematics Teaching in the Middle School* 13, no. 8 (2008): 438–45.

U.S. Department of Education (ED). *Science, Technology, Engineering and Math:Education for Global Leadership.* Washington, D.C.: ED, 2014. http://www.ed.gov/stem.

van Es, Elizabeth A. “A Framework for Learning to Notice Student Thinking.” In *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers’ Eyes*, edited by Miriam Gamoran Sherin, Victoria R. Jacobs, and Randolph A. Philipp, pp. 134–51. New York: Routledge, 2010.

Wager, Anita A. “Incorporating Out-of-School Mathematics: From Cultural Context to Embedded Practice.” *Journal of Mathematics Teacher Education* 15, no. 1 (2012): 9–23.



Walker, Erica N. (2003). "Who Can Do Mathematics?" In *Activating Mathematical Talent*, edited by Bruce R. Vogeli and Alexander Karp, pp. 15–27. Boston: Houghton Mifflin and National Council of Supervisors of Mathematics, 2003.

Walsh, Jackie Acree, and Beth Dankert Sattes. *Quality Questioning: Research-Based Practice to Engage Every Learner*. Thousand Hills, Calif.: Corwin Press, 2005.

Warshauer, Hiroko Kawaguchi. "The Role of Productive Struggle in Teaching and Learning Middle School Mathematics." PhD diss., University of Texas at Austin, 2011.

Webb, David C., Nina Boswinkel, and Truus Dekker. "Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding." *Mathematics Teaching in the Middle School* 14, no. 2 (2008): 110–13.

Webel, Corey. "Shifting Mathematical Authority from Teacher to Community." *Mathematics Teacher* 104, no. 4 (2010): 315–18.

Wei, Ruth Chung, Linda Darling-Hammond, Alethea Andree, Nikole Richardson, and Stelios Orphanos. *Professional Learning in the Learning Profession: A Status Report on Teacher Development in the United States and Abroad*. Dallas, Tex.: National Staff Development Council, 2009.

Weiss, Iris R., and Joan D. Pasley. "What Is High-Quality Instruction?" *Educational Leadership* 61, no. 5 (2004): 24–28.

White, Stephen H. *Beyond the Numbers: Making Data Work for Teachers and School Leaders*. Englewood, Colo.: Advanced Learning Press, 2011.

Wiggins, Grant, and Jay McTighe. *Understanding by Design*. Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development, 1998.

Wiliam, Dylan. "Content *Then* Process: Teacher Learning Communities in the Service of Formative Assessment." In *Ahead of the Curve: The Power of Assessment to Transform Teaching and Learning*, edited by Douglas Reeves, pp. 183–204. Bloomington, Ind.: Solution Tree Press, 2007b.

———. "Keeping Learning on Track: Classroom Assessment and the Regulation of Learning." In *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning*, edited by Frank K. Lester, Jr., pp. 1053–98. Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2007a.

———. *Embedded Formative Assessment*. Bloomington, Ind.: Solution Tree Press, 2011.

Wilkins, Jesse L. M. "The Relationship among Elementary Teachers' Content Knowledge, Attitudes, Beliefs, and Practices." *Journal of Mathematics Teacher Education* 11, no. 2 (2008): 139–64.

Williams, Belinda. "Reframing the Reform Agenda." In *Closing the Achievement Gaps: A Vision for Changing Beliefs and Practices*, edited by Belinda Williams, pp. 178–96, Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development, 2003.

Wood, Terry. "Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funneling or Focusing?" In *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, edited by Heinz Steinbring, Maria G. Bartolini Bussi, and Anna Sierpinska, pp. 167–78. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.

Wood, Terry, and Tammy Turner-Vorbeck. "Extending the Conception of Mathematics Teaching." In *Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics*, edited by Terry Wood, Barbara Scott Nelson, and Janet Warfield, pp. 185–208. Mahwah, N.J.: Erlbaum, 2001.

Zimba, Jason. "Examples of Structure in the *Common Core State Standards*' Standards for Mathematical Content" (draft, 2011). http://ime.math.arizona.edu/2011-12/ccssatlas_2011_07_06_0956_p1p2.pdf.

Zimmerman, Barry J. "Theories of Self-Regulated Learning and Academic Achievement: An Overview and Analysis." In *Self-Regulated Learning and Academic Achievement: Theoretical Perspectives*, edited by Barry J. Zimmerman and Dale H. Schunk, pp. 1–65. Mahwah, N.J.: Erlbaum, 2001.



La adopción generalizada de los estándares para la educación profesional y para el mercado laboral, que incluyen los Estándares estatales de base común, ofrecen una oportunidad histórica para mejorar la educación matemática. ¿Qué se requerirá para que en cada salón de clases, escuela y distrito se concrete esta oportunidad?

El *NCTM* continúa su tradición de liderazgo en la educación matemática mediante la definición y la descripción de los principios y acciones que resultan esenciales para fortalecer el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas para todos los estudiantes.

El documento De los principios a la acción: garantizar el éxito para todos proporciona una guía para los docentes, especialistas, asesores pedagógicos, administradores, responsables de las políticas y padres para:

- Basarse en los principios expresados en el documento Principios y estándares para la educación matemática con el objeto de presentar seis principios **guía actualizados para la educación matemática.**

- Apoyar el primer documento principio rector, enseñanza y aprendizaje, con ocho prácticas esenciales de enseñanza matemática, **basadas en la investigación.**

- Detallar los cinco principios restantes (**los elementos esenciales** que apoyan la enseñanza y el aprendizaje tal y como están incluidos en las Prácticas de enseñanza de las matemáticas).

- Identificar los obstáculos y las prácticas productivas e improductivas que todos los participantes deben reconocer, así como las acciones de los docentes y estudiantes que caracterizan a la enseñanza y el aprendizaje eficaces que están acordes con las Prácticas de enseñanza de las matemáticas.

Con el documento *De los principios a la acción*, el *NCTM* da el siguiente paso para configurar el desarrollo de estándares de alta calidad para Estados Unidos, Canadá y el resto del mundo.

15147